Trigonometria.

Előadója:
Dr. Vályi Gyula.

Inv. 1011.

MATHEMAT. SEMINARIUM
KOLOZSVÁR.

Kolozsvár, 1905.

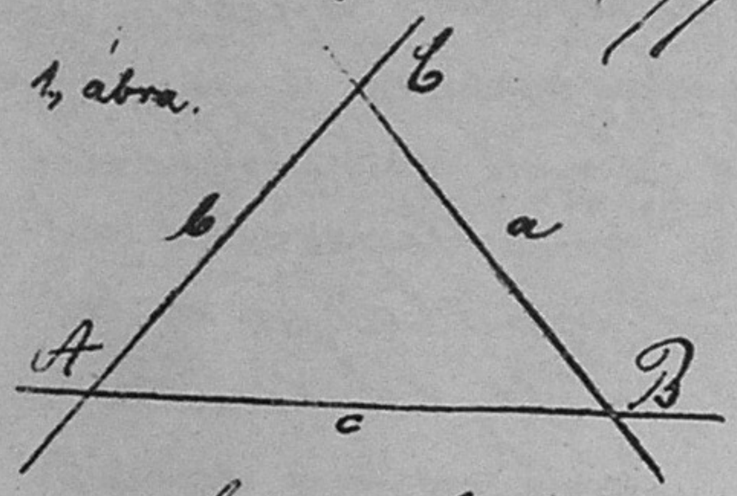
Bevezetés.

A trigonometria egyszerűen földadatokkal foglalkozik, melyekből az elemi u. n. Euklidesi geometria. Az Euklides féle geometria az egyszerűbb geometriai földadatokat tanulmányozza s azokat szerkesztéssel oldja meg. A trigonometria ellenben mindenen földadatokat számítás útján dönti el.

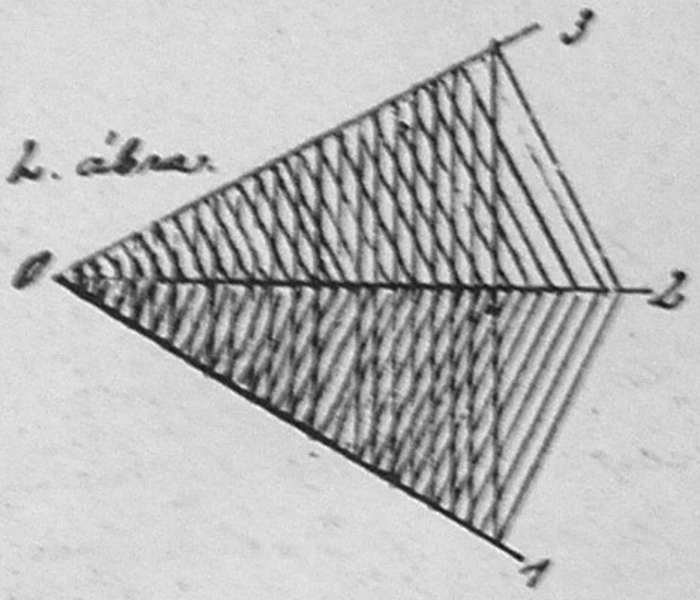
A geometriában a két legegyszerűbb geometriai alak a háromszög és háromél (tricéder).

A **háromszög** úgy keletkezik, hogy a síkon három, nem egy egyenesen levő pontján keresztül három egyenest fektetünk. A határolt rész a háromszög területe. A pontok, melyeken át az egyeneseket fektettük, a háromszög csúcspontjai. (A, B, C). Míg a csúcspontok közé eső rész a háromszög oldalaival határolt darabokat a háromszög oldalainak mondjuk. És végül a háromszögnél 6 adatot kell megkülönböztetnünk: 3 oldalt és 3 szöget. — Az Euklides féle geometria kimutatja, hogy egymástól függetlenül három adatból lehet háromszöget szerkeszteni. A trigonometria földadata ennek az, hogy a hiányzó számítás és nem szerkesztés útján határozza meg.

1. ábra.

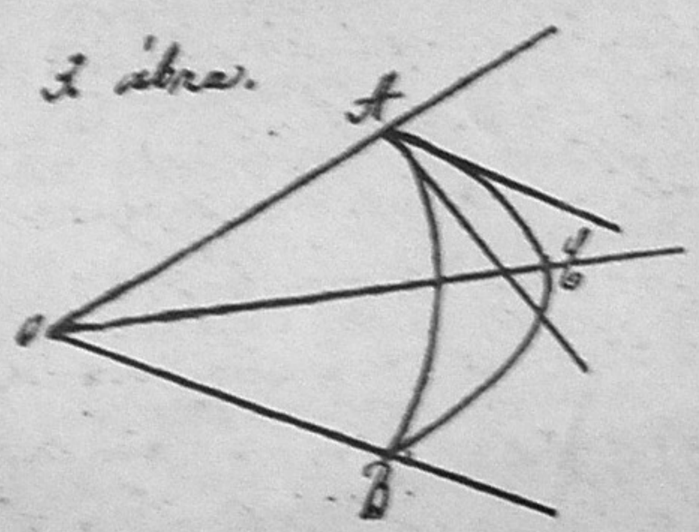


A **háromél** úgy keletkezik, hogy egy ponton át három, nem egy síkban levő egyenest vesznek föl s ezt-ezt egyenesen át síkot fektetünk. Ezek azonban nem vesznek végtelen nagyságúak.



2. ábra.

háromszögek egyenesekig terjedőnek. A háromélnél és 6 állapotúnál egyenesek, u. m. 3 élszög és 3 lapszög. Élszögnek két-két él hajlásszögét nevezzük. A lapszögelés két-két sík hajlásszöge mérni. A háromélnél is három állapotúnál a többi kiszámítható. Az állapotviszonyokat szemléltető képet megpróbáljuk, ha a háromél csúcsát egy egység sugarú gömb középpontjába helyezzük, miközben a gömb a háromélből egy oly gömbi háromszöget (at B C) metsz ki, melynek szögei a háromél lapszögeit s oldalai a háromél élszögeit mérik. Ez belátható, mert



3. ábra.

1, két lap hajlásszögét úgy kapjuk, ha a két lap metszésénél egyik pontjába a síkokban fekvő merőlegeselet állítunk! e két merőleges által bezárt szög adja a két sík hajlásszögét. Legyen az a pont, melyben épen merőlegeseket állítunk! épen a gömbi háromszög egyik csúcsa, pl. t, akkor az itt emelt merőlegesek egy egyenes ívei lesznek. Megállapodás szerint azonban két ív hajlásszögét az ívek metszőpontjához tartozó érintők hajlásszöge méri, tehát a két lap hajlásszöge egyúttal a gömbi háromszög egyik szöge.

2, A gömbi háromszög oldalai azért mérik a háromél élszögeit, mert általában egy szög mértékül a szög szárai közé eső egységnyi sugarú körívet vesik.

A trigonometria a háromszöggel és háromellel foglalkozik s épen ezért két részre oszlik: sík- és gömbtrigonometriára.

A sík trigonometriája.

Minthogy a trigonometriában fődadatokat szerkesztés helyett számítással oldunk meg, azért az a kérdés, hogy a geometriában vannak-e olyan alkotóelemek, melyek számokkal kifejezhetők, vagyis melyek mérhetők? Ilyen mérhető alkotóelem a vonal és a szög.

A egyenes mérése.

Az egyenes vonal mérésére két módszert ismerünk. Az első módszer szerint a következőképen járunk el.

Legyen a megmérendő távolság L, a mérőke pedig l, akkor a mérésnél két eset lehetséges: l maradék nélkül ráfér L-re pl a_0 szor, s így az L hosszúság mérőszáma $= a_0$ vagyis $\frac{L}{l} = a_0$. Ha nem fér rá L-re maradék nélkül, akkor $\frac{L}{l} = a_0 + \frac{L_1}{l}$ hol a maradék $L_1 < l$ Ezután L_1 tizedrészét mérjük l-el az előbbi módon így $\frac{10L_1}{l} = a_1 + \frac{L_2}{l}$ ezután sorra L_2 tizedrészét mérjük össze

$$\frac{10L_2}{l} = a_2 + \frac{L_3}{l}$$

.....

Ha véges számszor ismételve az eljárást az osztás bevégződik, akkor $\frac{L}{l}$ ily alakban jelenik meg:

$$\frac{L}{l} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots\ldots + \frac{a_k}{10^k}$$

Ha azonban az osztás nem megy föl, akkor $\frac{L}{l}$ egy végtelen tizedes törttel lesz kifejezve, mely tört lehet szakaszos vagy nem szakaszos. Előbbi esetben a mérőszám még **racionális**, mert a szakaszos tizedes törtet egészszám per egészszám alakra hozhatjuk, utóbbi esetben azonban a mérőszám **irracionális**.

Az egyenes mérésére a második módszer még kettő

destől származik. Itt a mérőszámot lánctört alakjában kapjuk.

Ot mérésnél a kiindulás itt is úgy történik, mint az előbbi módszernél. Ha $\frac{a}{b}$ nem ad egész számot, azaz ha b nem megy föl a-ba egész számszor, akkor $\frac{a}{b} = b_0 + \frac{b_1}{b}$ alakú lesz. Most b_1-et mérjük föl b-re, tehát $\frac{b}{b_1}$-et számítjuk. $\frac{b}{b_1} = b_1 + \frac{b_2}{b_1}$

s továbbá $\frac{b_1}{b_2} = b_2 + \frac{b_3}{b_2}$

Itt lehet, hogy az eljárás egészszámmal is ismétlve véget ér, akkor $\frac{a}{b} = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cfrac{1}{b_4} \cdots\cdots + \frac{1}{b_k}}}}$

mely lánctört vagy véges vagy a mérőszám racionális; míg ha a lánc végtelen, akkor a mérőszám irracionális lesz. Bebizonyítottuk tehát, hogy az egyenes vonal darabot minden esetben tudjuk mérni, vagyis a vonal darab a geometriában mérhető, számokkal kifejezhető elem.

A szögek mérése.

Szög alatt két iránynak egymástól való eltérését értjük. Két metsző egyenes mindig szöget alkot. A szögek közül kitűnik a derékszög, melynek az a tulajdonsága van, hogy mellékszögével egyenlő. A hegyes szög a derékszögnél kisebb, a tompaszög egy és két derékszög közt van. A két derékszögnél nagyobb szöget visszahajlott szögnek mondjuk.

A szögek mérésére kétféle mérőeljárást ismerünk fel: szöget és vonal-hosszat.

1.) A szöggel való mérése annak szögnek úgy történik,

hogy az egységül fölvett ívöget a megmérendő" ívögre ámmpiszor vesszük rá, ahányszor lehet. Vagyis a mérés épen úgy történik, mint az egyenes darabé mérése. Ívögegységül régebben a derék ívöget vették, jelenleg a praxisban ennek kilenvonad részét a fokot vesszük.

2.) A vonallal való mérés az ívhosszal történik, u.i. az egységnyi sugárral a ívög ívcsaából kört húzva a kör kerülete 2π-vel egyenlő. Tehát 2π adja a 360° ú ívög mértékét. Épen mérését körmérésnek mondjuk. (π az egységnyi sugarú körbe és kör köré írható jó jegyen kerületének hímezve, határértéke; neve Ludolf féle szám.)

E különböző mérőszámok közt egyenerű az összefüggés. Legyen valamely ívög fokokban kifejezve α°, minthogy ha az egység a derékívög (jele R) akkor $1° = \frac{1}{R}$ a derékívög egységekben kifejezve, azért $\alpha° = \frac{\alpha}{R}$ Továbbá $1° = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$ azért $\alpha° = \alpha \frac{\pi}{180}$ ívhosszakban kifejezve.

A számfogalmat az eddigieknél még nagyobb terjedelembe vesszük föl. Ugyanis tekintettel lészünk a vonalnak nemcsak nagyságára, hanem irányára is. A nagyság és irány szerint vett egyenest vectornak nevezzük. Az így definiált vectorra nézve áll,

I. Ha $AB = CD$
akkor $CD = AB$

I. Ha $AB = CD$
és $EF = CD$
akkor $AB = EF$

Ha a vectort a vonalon eltoljuk, nagyságára és irányra nem változik. Ily eltolásával az egyenesen lévő" összes vectorokat közös kezdő" pontba hozhatjuk, miáltal az egyenesen lévő összes vectorok oly sokaságot alkotnak, mint az egyenes összes pontjai.

Két vectort egymásával egyenlőnek mondunk, ha

nagyságuk egyenlő és irányuk megegyező.

Vektorok összeadása.

Ha egy egyenesen fölvesszünk két vektort ($\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{CD}$) akkor ezek összege alatt ($\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$) oly vektort értünk, melynek kezdőpontja az első vektor kezdőpontja (A) végpontja pedig a második vektor végpontja (D)
Tehát

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$

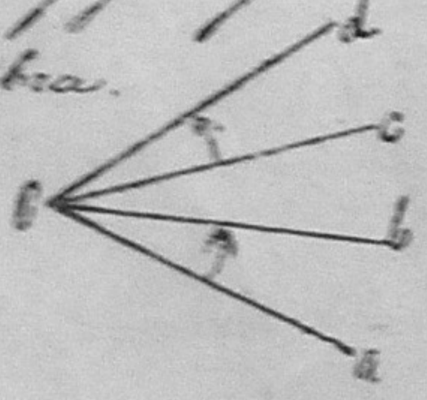
A vektor irányára nézve megállapodás szerint a számegyenesen a 0 ponttól jobbra eső irányt pozitívnak, balra eső pedig negatívnak vesszük.

Minthogy a számegyenesen lévő összes vektorok oly csoportját alkotnak, mint az egyenes összes pontjai, ezért minden vektorhoz egy szám, a fordítva minden számhoz egy vektor tartozik. Ez így meghatározott vektorok összeadását tehetjük fedni a pozitív és negatív számok algebrai összeadására.

Ha a térgeben irányt is definiálunk, akkor a térség is vektoros mennyiség.

Két térnek számai közt megkülönböztetünk első és második számot. A térget mindig az első szám forgásából számmaztatjuk. Megállapodás szerint, ha ez a forgás az óramutató forgásával ellenkező, akkor a keletkezett térség pozitív, míg ha az óramutató forgásával megegyező, akkor a keletkezett térség negatív.
Ezenkívül, két térség csak akkor egyenlő egymásával, ha a nagyságuk mellett forgási irányuk is egyező.

4. ábra.



Az 4. ábrán $abcd$ mert a két térség irány és nagyságra nézve egyenlő!

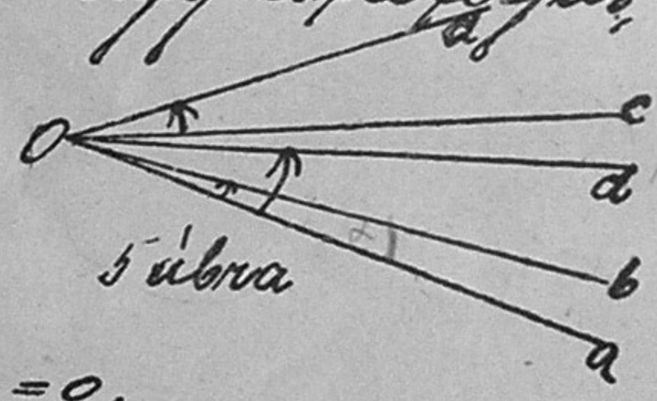
Térjünk most csak két térget a síkos

körül való forgatással sem nagyságukat, sem irányukat nem változtatják. Ily forgatással tehát az összes közös eredő szögeket közös első szárra lehet hozni. Et közös első szárra hozott szögek oly sorrendet alkotnak, mint az egy pontból kiinduló összes egyenesek.

Szögek összeadása.

Et szögek összeadása vagy geometriailag, vagy algebrailag végezhető.

Et geometriai összeadás a szög szárainak egymásközti elforgatásán alapszik, s az elforgatást úgy eszközli, hogy a második szög első szára összeessék az első szög második szárával. $a\,b + c\,d = a\,d'$. Az irányra itt is tekintettel kell lenni, így lesz pl. $a\,a + c\,b = a\,b$, vagy: $a\,b + b\,a = a\,a = 0$.



5 ábra

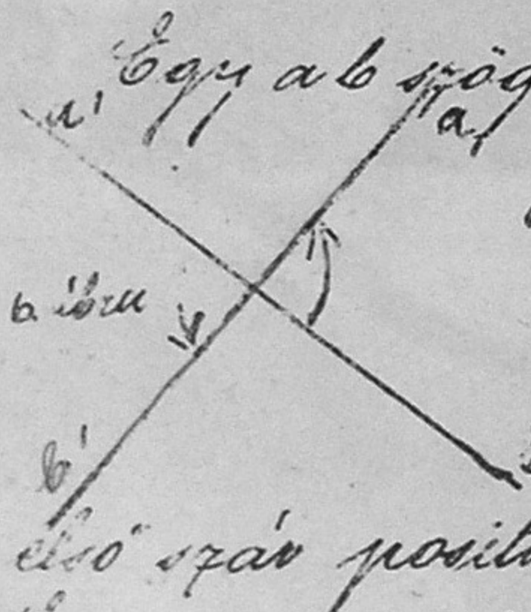
Az algebrai összeadás a mérőszámok alapján történik. Itt azonban meg kell jegyezni, hogy egy szöghöz nem egy mérőszám, hanem végtelen sok tartozik. Pl. ab szög legegyszerűbben származtatott „a" szár „b"-be forgatásából által a kétszer mérőszámnyi teljes fordulatot tesz, de szerint ab lehet $\alpha, \alpha + 2\pi, \alpha + 4\pi, \alpha + 6\pi, \ldots\ldots \alpha + 2k\pi$. De eljut az „a" szár „b"-be negativ forgással is: $-(2\pi - \alpha)$ fordulással, vagy ha még egyszer a szár 1, 2, 3.... stb teljes fordulatot tesz meg negativ irányban, tehát akkor ab lehet: $\alpha - 2\pi$ $\alpha - 4\pi$..... $\alpha - 2k\pi$. Vagy a két esetet egybefoglalva: $ab = \alpha + 2k\pi$ hol „k" lehet pos. vagy neg.

Ezen mérőszámok közül a két derékszögnél kisebbet az illető szög főértékének nevezzük. Ily megszorítással a főérték lehet positiv vagy negativ hegyes-, tompa-,

és derékszög; továbbá határesetként a szög, vagy nyújtott szög, mely utóbbinak mérőszáma ± π (rendesen + π t beszük ja főértékeül.) A főértéket esetül a jelölésben is megkülönböztetjük, amennyiben a főértéket mindég zárójelben fogjuk írni. Tehát ab alatt mindég az ab szög összes értékét, míg (ab) alatt csak a főértéket értjük. Ily jelöléssel az összeadásnál

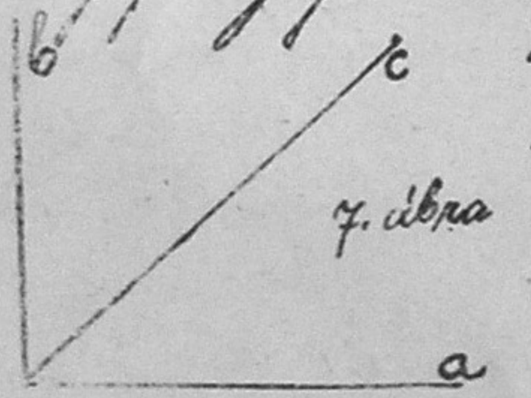
$ab + bd = ad'$ azt jelenti, hogy ab szög akármelyik mérőszáma cd szög akármelyik mérőszámával összeadva a d'-t adja, mely ad' azonban szintén végtelen sok értékű. Tehát az egyenlet két oldala még mindég különbözhetik 2π-nel egész számú szorzójával. Ekkor a szögeket, melyek egymástól 2π egész számú szorosaival különböznek egymástól, equivalenseknek mondjuk. (Jele $\equiv$) $(ab) + (cd) \equiv (ad')$

Szög elnevezések.



Egy ab szög összszöge alatt értjük azon vele egyenlő nagyságú és irányú szöget, melyet onnan kapunk, ha az ab szög szárait megkettőzzük. (a' b'). Pótszög (kiegészítő szög) alatt azt a szöget értjük, melyet valely szög második szára az első szár positiv normálisával bezár. a c pótszöge c b'

Egy egyenes positiv normálisa alatt az egyenes végpontja körül 90° alatt kiforgatott egyenest értjük; így a-nak pos. normálisa b', de megfordítva nem. – A pótszög meghatározásából következik, hogy $(ac) + (cb) = \frac{\pi}{2}$ miből a pótszög



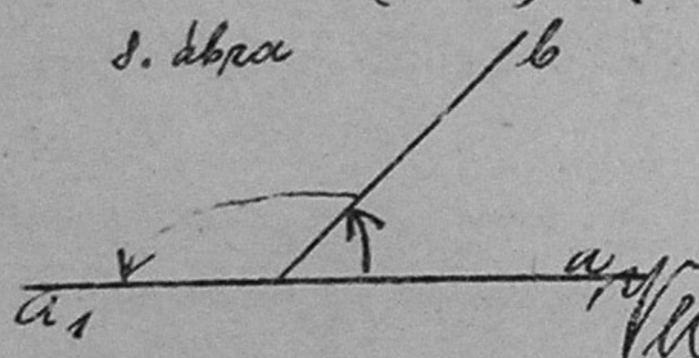
7. ábra

$(cb) = \frac{\pi}{2} - (ac)$

Mellékszög alatt pedig azt a szöget értjük, melyet

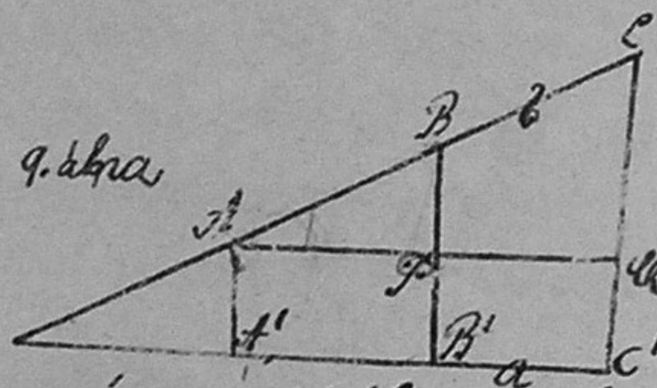
a szög második szára az elsőnek meghosszabbítá-
sából adott: (ab) mellékszöge (ba_1) A mellékszöggel
jellemző, hogy

$$(ab) + (ba_1) \equiv \pi \quad \text{tehát} \quad (ba_1) \equiv \pi - (ab)$$



8. ábra

Vektorok és szögek összefüggése.

Most összehasonlítjuk össze vektorokkal, hogy
ezáltal kifejezhessük állandó irányokhoz viszonyítjuk. Ez
végből vegyünk fel egy szöget, a b" a ezzel egy vektort
AB, és most ezt projiciáljuk, a' projectio: A'B'.
Ezen projectio vector és a projiciált vector közt m. a
szög mellett a irányt állandó, a-
dott ezt a szög mérésére használ-
juk, a a viszonyt cosinussal jelö-
jük: $\frac{A'B'}{AB} = \cos(ab)$. Azokat a szá-
mokat, melyek a szög által a-


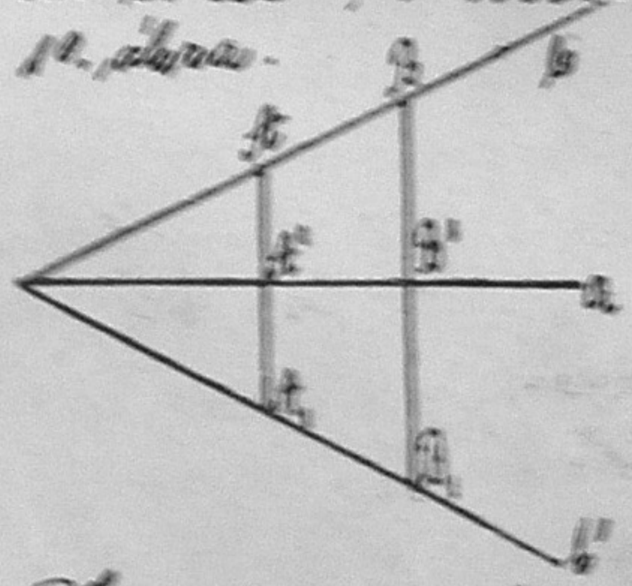
9. ábra
nevezzük szögmértani számoknak
páruktól a dolgot
ciált között a irányt állandó kifejezésére vár.
E végből vegyünk még egy másik vektort a „b" szárán A C
Ezt is projiciáljuk, a projectio: A'C' ha A-ból párhuza-
hozunk „c"-vel AP = A'B', A R = A'C'. De másfelől A PB hasonló A RC és így a megfelelő olda-
lak aránya egyenlő $\frac{AP}{AB} = \frac{AR}{AC}$. Amiből következik.
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$. Tehát a nagyságra nézve az állan-
dóság kifejezés. De kifejezés az irányjelre is, mert
ha projectionak irányjele ugyanaz, így a „cette"
háromszögeké minden pár.

A cos. értelmezéséből annak összes tulajdonságait levezethetjük. Minthogy egy szögnél többnek nincsen tartozéka, de a két szár állandó, azért a cos. is állandó, vagyis I. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$. Mely első alaptörvény a cos. **periodusosságát** mondja ki s a cos. periodusa: 2π.

Hogy milyen értékeket vehet föl a cos., azt azonnal látjuk, mihelyt a projekciót és projiciált vektort összehasonlítjuk. Tudjuk u.i., hogy annak nagyobb számszerű fehet, mint a projiciált vektor (egy derékszögű háromszögnél mint befogó, átfogó ugyanis a projektív, mint befogó. S minthogy a projektív adja a cos.-t, az a számértéket s a projiciált vektor a irányát, azért a cos. 1-nél nagyobb nem lehet, legfeljebb egyenlő eggyel, ha a szög 0; tehát: $\cos 0 = 1$. Ha a szög derékszámra $\frac{\pi}{2}$, akkor a projektív 0, tehát $\cos\frac{\pi}{2} = 0$. Ha a szög mérőszáma π, akkor a projektív ellentett irányú a projiciált vektorral, de vele egyenlő nagyságú, tehát $\frac{A'B'}{AB} = -1$ vagyis a $\cos\pi = -1$, $\cos\frac{3\pi}{2}$ ismét egyenlő 0. A cos. többi értékei tehát

$$\cos 0 = 1,\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,\quad \cos\pi = -1,\quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

Ha egy szöggel annak ellentettjét is felvesszük ab-t és ab'-t, s ortogonáltartónk a cos.-t meghatározzuk; 1. ábra.



$\cos(ab) = \frac{A''B''}{AB}$ $\cos(ab') = \frac{A''B''}{A_1B_1}$, de a vagyis párhuzamos háromszögek alapján $AB = A_1B_1$, azért $\frac{A''B''}{AB} = \frac{A''B''}{A_1B_1}$ (mellesleg $\cos ab = \cos(ab')$) vagyis, ha „ab" mérőszáma: α, „ab'" ennek mérőszáma $-\alpha$, nyerjük a második alaptörvényt:

II. $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.

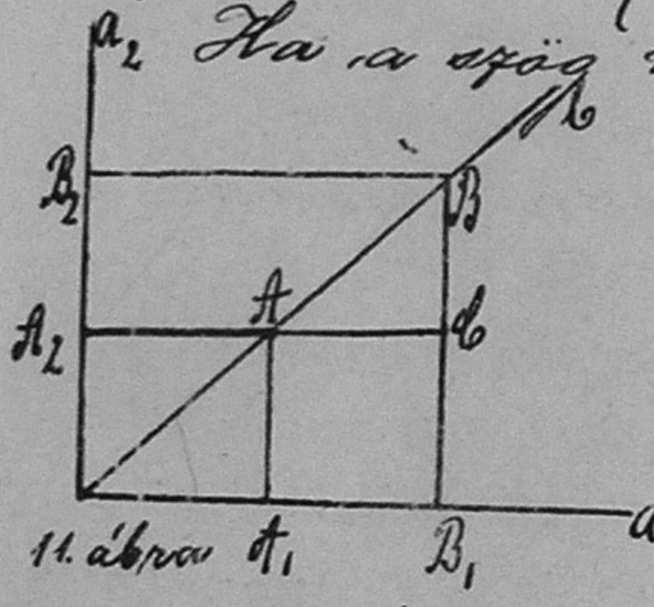
Ha a szögről áttérünk annak mellékszögére, akkor

a hármyados értéke változatlan, de előjele megváltozik, tehát

$$\text{II. } \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$

De mivel $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ azért $\cos(\pi-\alpha) = \cos(\alpha-\pi)$ ajapót I tétel alapján $\cos(\alpha-\pi) = \cos(\alpha-\pi+2\pi)$

azért $\underline{\text{IV}}.\ \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$



11. ábra

Ha a szög második szárán vett vektort az első szár pos. normálisára projiciáljuk, akkor az így nyert projekció viszonyát a felvett vektorhoz sinusnak nevezzük; tehát

$$\frac{A_2B_2}{AB} = \sin(a\,b)$$

Az $\frac{A_2B_2}{AB}$ viszony azonban a (ba_2) szög cosinusával is felfogható, vagyis

$$\sin(ab) = \cos(ba_2) = \frac{A_2B_2}{AB}$$

Minthogy $ab + ba_2 = \frac{\pi}{2}$, azért $ba_2 = \frac{\pi}{2} - ab$

Jelöljük ab mérőszámát α-val ba_2 mérőszáma e szerint $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Ezen bevezetéssel nyerjük, hogy a szög sinusa egyenlő" a kiegészítő szög cosinusával és fordítva:

$$\text{I. } \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right);\quad \text{II. } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$$

Minthogy b szárnak 2π-vel való jobbra, vagy balra való forditásával ugyanazon szöget kapjuk, vagyis $ab \equiv (ab + 2n\pi)$, azért

$$\text{III } \sin(\alpha+2n\pi) = \sin\alpha$$

Ami a sinus periciitását mondja ki.

Minthogy $-\alpha$ kiegészítő szöge $\frac{\pi}{2} + \alpha$ azért az I tétel szerint

$$\sin(-\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$

A cosra vonatkozó III tétel szerint azonban

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\cos\left(\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Ez pedig a sinusra vonatkozó I tétel szerint

$$-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\sin\alpha$$

vagyis: $\underline{\text{V}}\quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

Tehát a negatív szög sinusa egyenlő a pozitív szög sinusának ellentettjével.

Továbbá: $\sin(\pi-\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi+\alpha\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

de $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$ tehát

$\underline{\text{V.}}\quad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$

vagyis a mellékszögek sinusai irány és nagyság szerint egyenlők.

Ezen V. tételből fogva

$$\sin(\pi+\alpha) = \sin(-\alpha)$$

de $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, tehát

$\underline{\text{VI.}}\quad \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$

A sinus értéke is nulla és egy között ingadozik, a határértékek a cosinussal való összefüggés alapján felírhatók:

$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$; $\qquad \sin\pi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$

$\sin\frac{\pi}{2} = \cos 0 = 1$; $\qquad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\pi) = -1.$

A sin és cos között a 11 ábrából egyszerű összefüggést olvashatunk ki. A Phytagoras tétel szerint u.is

$$AC^2 + CB^2 = AB^2;$$

ennek egyenletet AB^2-tal, akkor

$$\left(\frac{AC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 = 1$$

De $\frac{AC}{AB} = \frac{AB'}{AB} = \cos\alpha$ és $\frac{CB}{AB} = \frac{A_2B_2}{AB} = \sin\alpha$

tehát: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

A sin és cos a tulajdonképpeni elemi trigonometriai függvény, ezek kombinációival kapjuk a többi trig. függvényeket. Így

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha$; $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg$

és $\frac{1}{\sin\alpha} = cosec\,\alpha$ $\frac{1}{\cos\alpha} = sec\,\alpha$

A sec. és cosec. ma már nem igen használatosak.

A tangensre vonatkozó tételek: Mivel hogy tg

azért $tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

I $tg(-\alpha) = -tg\,\alpha$

Hasonlóképpen okoskodva

II. $tg(\pi - \alpha) = -tg\,\alpha$

III $tg(\pi + \alpha) = tg\,\alpha$

Mely utóbbi egyenlet azt mutatja, hogy a tangens π szerint periodikus függvény.

Minthogy a def. szerint $tg\,\alpha = \frac{1}{cotg\,\alpha}$, azért a tétel, hogy

a tételek a cotangensre is állnak. Áll továbbá

$$tg\,\alpha = cotg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

és $$cotg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Vagyis a „kiegészítő" szög tangense egyenlő a szög cosinus és cos főértékeiből adódnak. Megjegyzendő, hogy a $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ illetőleg a $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ hányadosból, midőn a „nevező" 0-á válik, azt az esetet limeszként (határesetként) kell felfognunk.

Ezek szerint

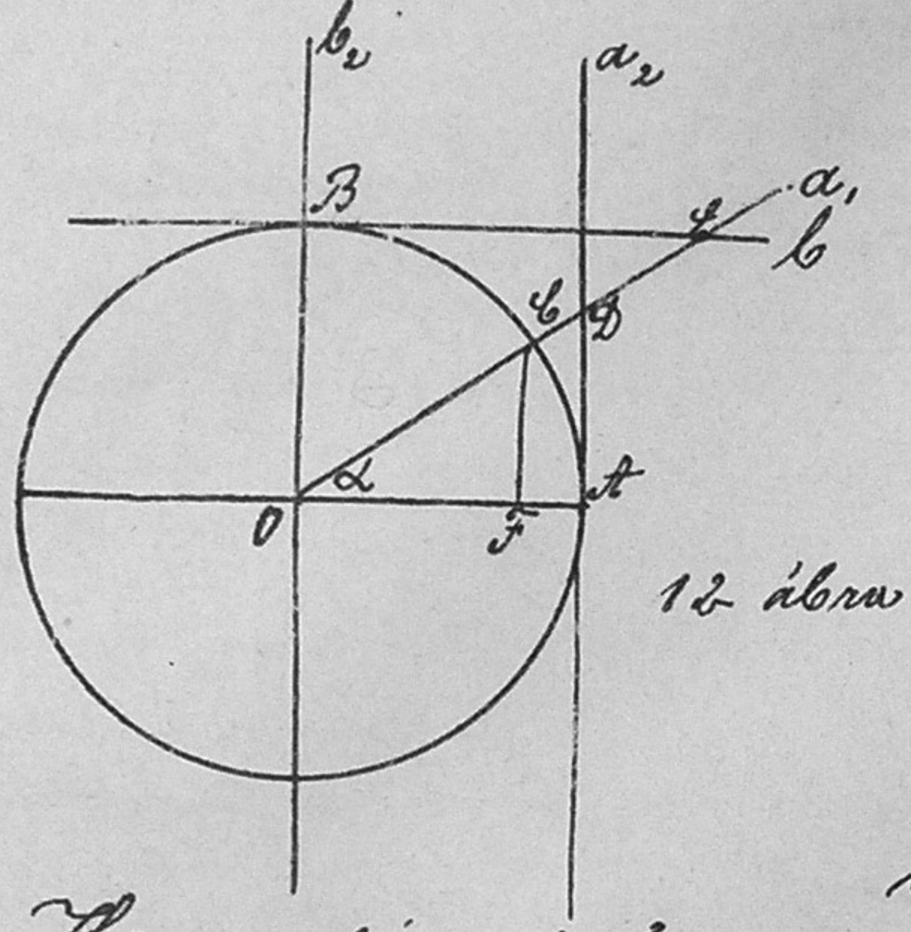
$tg\,0 = 0$ $\quad cotg\,0 = \infty$

$tg\,\frac{\pi}{2} = \infty$ $\quad cotg\,\frac{\pi}{2} = 0$

$tg\,\pi = 0$ $\quad cotg\,\pi = \infty$

$tg\,\frac{3\pi}{2} = \infty$ $\quad cotg\,\frac{3\pi}{2} = 0$

A trigonometriai függvények menetéről könnyen fogalmat szerezhetünk magunknak egy geometriai képben. Húzzunk egy egységkört és húzzuk meg a mellékelt ábrán látható egyeneseket. Ekkor a szög sinusa – mint tudjuk



12. ábra

$\frac{FE}{EO}$ de $EO = 1$

tehát

$\sin \alpha = FE$

Ugyanezen elvből fogva

$\cos \alpha = OF$, $\operatorname{tg} \alpha = AD$, $\operatorname{cotg} \alpha = BE$

$\sec \alpha = OD$ és $\operatorname{cosec} \alpha = OE$

Trigonometriai alapegyenletek.

Láttuk, hogy I $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

osszuk ezen egyenletet $\cos^2 \alpha$-val akkor I. $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$

Ha pedig $\sin^2 \alpha$ - val osztunk, akkor

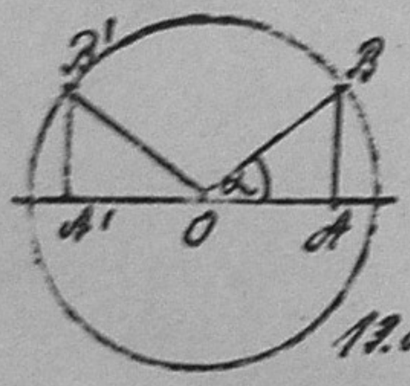
III. $1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

Ezen három alapegyenlet segélyével az összes függvényeket egyenletét a többiek által kifejezhetjük. Ha a következő táblázat első sora a kifejezendő függvényeket tartalmazza a többi sor a kifejezettet.

$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$
$\sin \alpha$	$\sqrt{1-\sin^2 \alpha}$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$
$\sqrt{1-\cos^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}$
$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, $\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$ $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ $\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$
$\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{cotg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha}$	$\operatorname{cotg} \alpha$

A fenti kifejezésekben $\sqrt{\ }$ jel is szerepel, tehát nem minden függvény határozza meg a másikat

egyértelműleg. Ennek ob- a függvények ábrázolásá-
ról is világosan látszik. A sinus megadásával

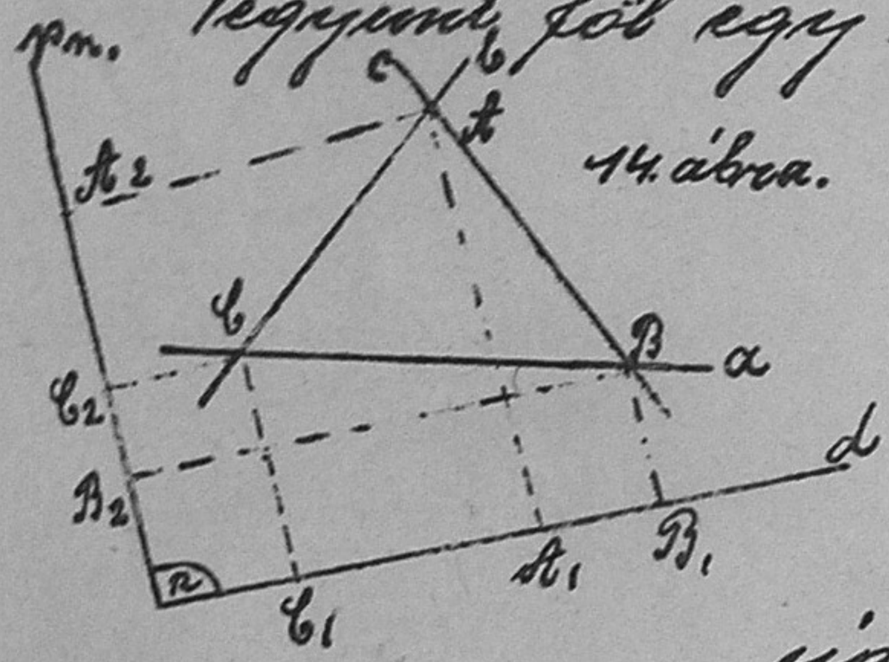


13. ábra

pl. csak az $AB = A'B'$ hosszat adtuk meg, ehhez pedig két szög tartozik (α és $\pi - \alpha$), de két szöghöz más két cosinus tartozik. Tehát a fölött $AB = \sin\alpha$ hossz a cosinust két értelmüleg határoppa meg. Hasonlóképen van a többi szögfüggvénynél is.

Trigonometriai jellegű egyenletek.

Vegyünk föl egy tetszésszerinti ABC háromszöget s oldalait projiciáljuk egy tetszési szerinti (d) egyenesre és ennek pozitiv normálisára. Ha a háromszög oldalait vektorok gyanánt fogom föl, (AB, BC, CA), és szintúgy ezek projectióit is vektoroknak veszem, akkor a három projectia összege nulla:



14. ábra.

$$B_1C_1 + C_1A_1 + A_1B_1 = 0 \qquad 1.$$

mert $C_1A_1 + A_1B_1 = C_1B_1$ és $B_1C_1 + C_1B_1 = 0$

A szögfüggvények definitiója szerint azonban

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \cos(da) \quad \frac{C_1A_1}{CA} = \cos(db) \text{ és } \frac{A_1B_1}{AB} = \cos(dc)$$

Ezek szerint 1 egyenlet ily alakú.

I. $$BC\cos(da) + CA\cos(db) + AB\cos(dc) = 0$$

A positiv normálisra eljutott projectiokra vonatkozólag áll, hogy $B_2C_2 + C_2A_2 + A_2B_2 = 0$, de itt is

$$\frac{B_2C_2}{BC} = \sin(da), \quad \frac{C_2A_2}{CA} = \sin(db) \text{ és } \frac{A_2B_2}{AB} = \sin(dc)$$

Ez szerint az utóbbi egyenlet így alakul:

II. $Bb \sin(da) + Ct \sin(db) + At\,B \sin(dc) = 0$

és így nyert I. és II. egyenlet minden fönn áll, b tetszőleges is választ meg a d egyenest. Ezen két alapegyenletből fogjuk levezetni az összes trigonometriai egyenletet.

Minthogy d-t tetszés szerint vehetjük föl, vegyük föl úgy, hogy összeessék x-val, akkor a II. egyenlet így alakul.

$$B\,b \sin(aa) + C\,t \sin(xb) + At\,B \sin(ac) = 0$$

minthogy pedig $\sin(aa) = \sin 0 = 0$ és

$\sin(ac) = -\sin(ca)$ azért írhatjuk, hogy

$$C\,t \sin(ab) - At\,B \sin(oa)$$

vagy $$\frac{C\,t}{\sin(ca)} = \frac{At\,B}{\sin(ab)}$$

Ha pedig d összeesik b-vel, akkor ugyancsak a II. egyenletből hasonló úton nyerjük, hogy

$$B\,C \sin(ba) + C\,t \sin(bb) + At\,B \sin(bc) = 0$$

miből $$\frac{At\,B}{\sin(ab)} = \frac{B\,C}{\sin(bc)}$$

vagyis. $$\frac{C\,t}{\sin(ca)} = \frac{At\,B}{\sin(ab)} = \frac{B\,C}{\sin(bc)} \qquad 1.$$

Ha pedig az I. egyenletnél ejtjük össze egymással d-t a, b, c-vel, akkor lesz:

Bb	$B\,C \cos(aa) + C\,t \cos(ab) + At\,B \cos(ac) = 0$
$-Ct$	$B\,C \cos(ba) + C\,t \cos(bb) + At\,B \cos(bc) = 0$
$-At\,B$	$B\,C \cos(ca) + C\,t \cos(cb) + At\,B \cos(cc) = 0$

Ezen egyenletet rendre megszorozva $B\,C$, $-C\,t$, $-At\,B$-vel, továbbá tekintetbe véve, hogy $\cos(aa) = \cos 0 = 1$ stb nyerjük, hogy

$$B\,C^2 + B\,C.\,C\,t \cos(ab) + B\,C.\,At\,B \cos(ac) = 0$$
$$-B\,C.\,C\,t \cos(ba) - C\,t^2 - At\,B.\,C\,t \cos(bc) = 0$$
$$-B\,C.\,At\,B \cos(ca) - At\,B.\,C\,t \cos(cb) - At\,B^2 = 0$$

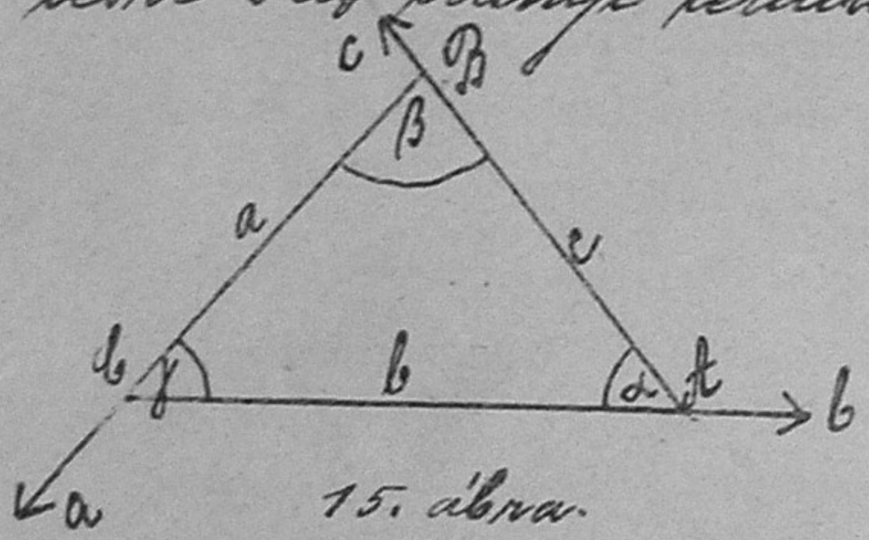
Ezek összeadásával és $\cos(ba) = \cos(ab)$ stb. behelyettesítésével lesz:

$$\overline{BC}^2 - \overline{CA}^2 - \overline{AB}^2 - 2\,CA.AB\cos(bc) = 0 \quad \text{vagy}$$
$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2 + 2\,CA.AB\cos(bc) \qquad 2.)$$

Hasonlóképen, ha az előbbeni három egyenletet rendre $-\overline{BC}, + \overline{CA}$ és $-\overline{AB}$-vel, azután $-\overline{BC}, -\overline{CA}, +\overline{AB}$-vel szorozzuk s összeadjuk, nyerjük ennél, hogy

$$\text{és} \begin{cases} \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2\,AB.BC\cos(ca) \\ \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + 2\,BC.CA\cos(ab) \end{cases} \qquad 2.)$$

Ha most áttérünk a közönséges trigonometriai jelölésre s az irányt tekintetbe véve



15. ábra.

$CA = b$, és $ca \equiv \pi - \beta$
$AB = c$, $ab \equiv \pi - \gamma$
$BC = a$, $bc \equiv \pi - \alpha$

továbbá

$\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta$ és $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$
$\cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$ és $\sin(\pi - \gamma) = \sin\gamma$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

akkor az előbb kifejtett két egyenlet csoportból a közönséges sinus és cosinus tételeket nyerjük.

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \qquad 1.)$$

és

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}\right\} \qquad 2.)$$

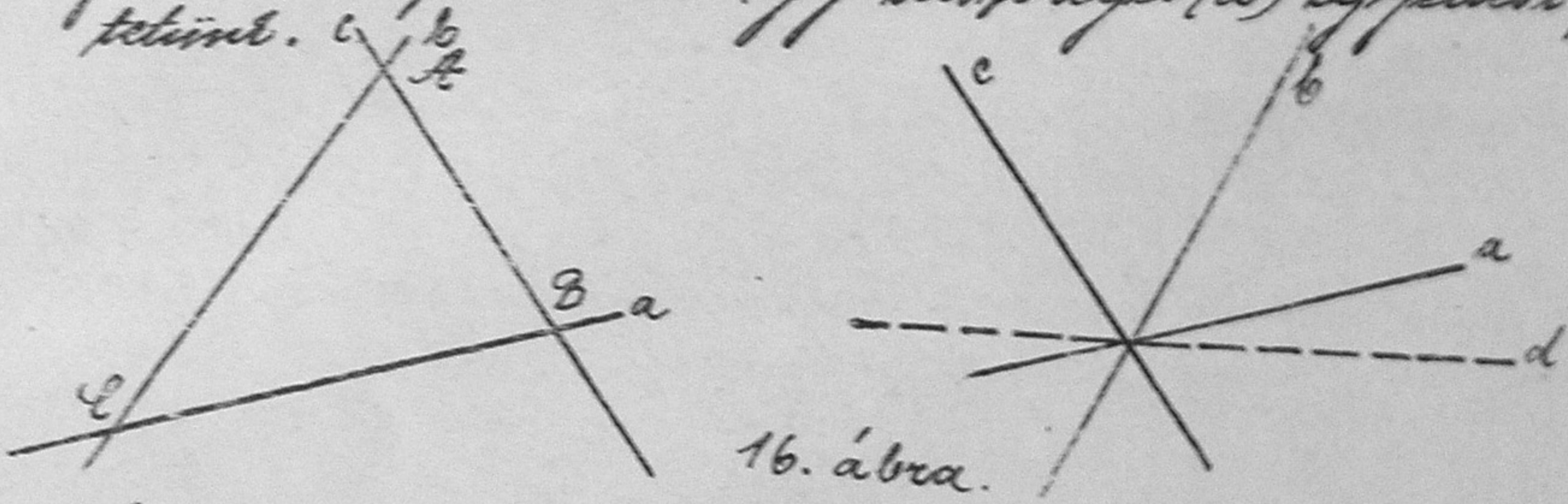
A sinus tétel alapján látjuk, hogy a háromszög oldalai és az oldalakkal szemközt levő szögek sinusainak viszonya állandó. Jelöljük ezt a viszonyt λ-val, akkor

$AB = \lambda\sin(ab)$, $BC = \lambda\sin(bc)$ és $CA = \lambda\sin(ca)$.

Ha ezen értékeket behelyettesítjük az I. és I. egyenletekbe, λ-val átosztunk, akkor nyerjük:

I. a.) $\sin(bc)\cos(da) + \sin(ca)\cos(db) + \sin(ab)\cos(dc) = 0$
II. a.) $\sin(bc)\sin(da) + \sin(ca)\sin(db) + \sin(ab)\sin(dc) = 0$

Ez a két egyenlet adja azon szögek közt lévő relációkat, amelyeket nyernünk, ha egy háromszög oldalait önmagukkal párhuzamosan egy pontba toljuk el s ha pontosan át egy tetszőleges (d) egyenest fektetünk.



16. ábra.

Ha bevezetjük a következő jelöléseket:

$(da) \equiv \alpha$, $(db) \equiv \beta$, $(dc) \equiv \gamma$

akkor ezen egyig segítségével az összes többi c pont körül fellépő szögeket is kifejezhetjük. Ugyanis, ha a szögeket is irány szerint vesszük, tehát vektoros mennyiségeknek tekintjük, akkor

$$da + ab + bc' = 0$$

így $(da) + (ab) + (bc') \equiv 0$ innen $(da) \equiv \alpha$

$(db) \equiv -(ab) \equiv \beta$

tehát $\alpha + (ab) - \beta \equiv 0$

amiből $(ab) \equiv \beta - \alpha$

hasonlóképen $(bc) \equiv \gamma - \beta$ és $(ca) \equiv \alpha - \gamma$

Behelyettesítés után pedig Σa_x és Σa_y-ból, lesz

Σb_x $\sin(\gamma - \beta)\cos\alpha + \sin(\alpha - \gamma)\cos\beta + \sin(\beta - \alpha)\cos\gamma = 0$

és Σb_y $\sin(\gamma - \beta)\sin\alpha + \sin(\alpha - \gamma)\sin\beta + \sin(\beta - \alpha)\sin\gamma = 0$

Ezen két relációban α, β, γ tetszésünk szerinti szögek lehetnek, legyen az Σb_y-ben $\gamma = 0$, akkor

$$\sin(-\beta)\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta + \sin(\beta - \alpha) = 0$$

minthogy tudjuk $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, azért

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$ vagy

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ ..... 3.)

Ha itt β helyett $-\beta$-t írunk, akkor

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ .... 4.)

mert $\sin(-\beta) = -\sin\beta$.

Ha pedig α helyett $\frac{\pi}{2} - \alpha$-t írunk be, akkor

$\sin\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] = \cos(\alpha+\beta)$ és így 3.) egyenletből:

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ ..... 5.)

4.)-ből pedig $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ ..6.)

Ezt így nyert 3., 4., 5., 6.) egyenletek fejezik ki az ismert trigonometriai összeadási tételeket.

Ezen négy relációból összeadás és kivonás útján újabb négy relációhoz jutunk 4.) hez adva 3.)-at

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

4.) ből levonva 3.)-at

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

6.) hoz adva 5.)-öt

$\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

6.)-ból levonva 5.)öt

$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta = 2\sin\alpha\sin\beta$ } 7.)

Ez a négy egyenlet különösen a régebbi időkben igen nagy fontosságú volt sőt m. fv. logarithmusi egyenletekkel kéjtorvoslik. Régebben egyen formulák arra segítettek, hogy ha pl. két szám szorzatát akartuk a szorzás elvégzése nélkül megtalálni, akkor így jártunk el: Tettük a megfelelő táblázatban a két számnak megfelelő szögeket, így megkaptuk a szögeket: α, β, hozzuk összeállítottuk az $\alpha+\beta$ és $\alpha-\beta$ összeget, ill. kivonást a vettük ezek szögeinek összegét: $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$ ami után a 7.) egyenlet csoport első relációja szerint a keresett szorzat kétszeresét szolgáltatta

Most azonban ejnek fordítva használjuk egyen relációkat: ha a baloldalt adnak, azt kívánni, a-

hat a jobb oldalt logarithmusok segítségével szám-
ját ki s így nyerjük a baloldal értékét.

Ha oped 7.) feltételben

$$\alpha + \beta = \varphi \quad \text{és} \quad \alpha - \beta = \psi \quad \text{akkor}$$

a két egyenletet összeadva majd kivonva

$$\alpha = \frac{\varphi + \psi}{2} \quad \text{és} \quad \beta = \frac{\varphi - \psi}{2}$$

Ezen jelölés bevezetésével a 7.) relatiok így alakulnak:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\varphi + \sin\psi &= 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\\
\sin\varphi - \sin\psi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}\\
\cos\psi + \cos\varphi &= 2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\\
\cos\psi - \cos\varphi &= 2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}
\end{aligned}\right\} \quad 7.a.)$$

Ha a 4.) és 5.) egyenletben $\beta = \alpha$ akkor

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad 8.)$$

és

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad 9.)$$

Mely két relatio azt mondja, hogy miként áll a szög függvényeit a félszög függvényeivel kife-jezni.

Ha az I. alapegyenlethez hozzáadjuk vagy levon-juk a 9.) egyenletet akkor forditva a félszög függ-vényei lépnek az egész szög függvényeivel fe-fejezve:

$$\left.\begin{aligned}
1 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha
\end{aligned}\right\} \pm$$

$$\left.\begin{aligned}
1 + \cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha\\
1 - \cos 2\alpha &= 2\sin^2\alpha
\end{aligned}\right\} \text{miből}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} \quad \text{és} \quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$$

Ezen egyenletek helyébe, ha α helyett $\frac{\alpha}{2}$ is teszünk, tehát

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \qquad 10.) \quad \text{és} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad 11.)$$

Feltűnik itt, hogy az egész szög függvényei a fél-szög függvényeit megnyelegyő-ként, tehát két értékűvel hatványát adj. Ennek oka az, hogy ha két szög equivalens is egymással ($\alpha = \beta$) még

nem következik, hogy a fél szögek is egyenlőek. Ha $\alpha \equiv \beta$, akkor $\alpha = \beta + 2k\pi$ tehát

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + k\pi$$ vagyis a félszögek arra az esetben egyenlőek, ha k páros szám ($\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2}$) ellenkező, ha k páratlan szám, akkor $\frac{\alpha}{2} \equiv \frac{\beta}{2} + \pi$ vel pedig éppen ellentett jelű a szög sinus és cosinusa sinusával. Ime a tételünk ötödik része:

A 7.) relációból megállapítható a következő igen fontos egyenlet:

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}$$ vagy

$$\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\sin\varphi + \sin\psi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}} \qquad 12.)$$

A 8.) egyenletet jobb oldalát $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ -gyel osztva 2α helyett mindenhol α-t illetőleg α helyett $\frac{\alpha}{2}$-t írva nyerjük, hogy

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Most a jobb oldal számlálóját s nevezőjét $\cos^2\frac{\alpha}{2}$-el osztva lesz:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1} \qquad 13.)$$

Hasonlóképpen nyerjük, hogy

$$\cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}$$ a jobboldal számlálója s nevezője osztva $\cos^2\frac{\alpha}{2}$-tel:

$$\cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + 1} \qquad 14.)$$

Ha a 13.) egyenletet osztjuk a 14.)-gyel, akkor egy

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} \qquad 15.)$$

és

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} \qquad 16.)$$

ezen utóbbi képletek (15, 16) segítségével az előbbi redukciós módszer, hogy a szöget a felére vagy tovább csökkentsük, alkalmas lehet közelítésre.

A 3, 4, 5, és 6) egyenletekből egyszerű úton újabb általánosítást nyerünk a szögfüggvények összegének és különbségének tangensére illetőleg cotangensére és ezek segítségével az illető szögek tangensére és cotangensére képletek, pl. is

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

Ha a jobboldalon számlálóját és nevezőjét osztjuk $\cos\alpha.\cos\beta$-val, akkor

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad 17.)$$

Hasonló képpen:

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$$

A jobb oldal $\cos\alpha\cos\beta$-vel osztva;

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad 18.)$$

A cotangensre vonatkozólag pedig

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

A jobb oldal $\sin\alpha\sin\beta$-val osztva:

$$\operatorname{cotg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha} \qquad 19.)$$

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

$\sin\alpha\sin\beta$ átosztásával:

$$\operatorname{cotg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta+1}{\operatorname{cotg}\beta-\operatorname{cotg}\alpha} \qquad 20.)$$

Ui secans és cosecansra vonatkozó analog képletek nem használatosak, azért itt mellőzzük.

Három- és többszörös szögek függvényei egyszerű függvényekkel kifejezve.

Már láttuk, hogy

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

és $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Ezen két egyenlet alapján az összeadási tételek alkalmazásra kiszámítjuk a többszörös szögek függvényeinek értékét az egyszeres szög függvényeivel kifejezve. Így

$\sin(3\alpha) = \sin(2\alpha+\alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha$

Felhasználva az előbbi két egyenletet

$\sin 3\alpha = 2 \sin\alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha$

$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$

Hasonlóképen:

$\cos 3\alpha = \cos(2\alpha+\alpha) = \cos 2\alpha \cos\alpha - 2 \sin 2\alpha \sin\alpha$

$= \cos^3\alpha - \cos\alpha \sin^2\alpha - 2 \sin^2\alpha \cos\alpha$

$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3 \sin^2\alpha \cos\alpha$

$\sin 4\alpha = \sin(3\alpha+\alpha) = \sin 3\alpha \cos\alpha + \cos 3\alpha \sin\alpha$

$= 3 \sin\alpha \cos^3\alpha - \sin^3\alpha \cos\alpha + \cos^3\alpha \sin\alpha$

$- 3 \sin^3\alpha \cos\alpha$

$\sin 4\alpha = 4 \sin\alpha \cos^3\alpha - 4 \sin^3\alpha \cos\alpha$

$\cos 4\alpha = \cos(3\alpha+\alpha) = \cos 3\alpha \cos\alpha - \sin 3\alpha \sin\alpha$

$= \cos^4\alpha - 3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha - 3 \sin^2\alpha \cos^2\alpha$

$- \sin^4\alpha$

$\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6 \sin^2\alpha \cos^2\alpha + \sin^4\alpha$

Ha így nyert

$\sin 2\alpha, \cos 2\alpha; \sin 3\alpha, \cos 3\alpha; \sin 4\alpha, \cos 4\alpha$

kifejezésekben közönyös szabálytalanságot látunk. Ui. is nyugaton szög sinusának és cosinusának

Összege a $(\cos\alpha + \sin\alpha)$ összeg négyzetét, hasonló kifejezéseket adjon, az egymásutánra következő tagokat váltakozó előjellel vesse. Miután hogy

$(\cos\alpha + \sin\alpha)^n = \cos^n\alpha + \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha + \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha$

$+ \ldots\ldots + \binom{n}{n-2}\cos^2\alpha\sin^{n-2}\alpha + \binom{n}{n-1}\cos\alpha\sin^{n-1}\alpha + \sin^n\alpha$

azért az általános formula $\cos n\alpha$ és $\sin n\alpha$ re lesz:

$\cos n\alpha = \cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots$

$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k}\alpha \ldots\ldots$

$\sin n\alpha = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha -$

$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-(2k+1)}\alpha\sin^{2k+1}\alpha \ldots\ldots$

Ez a formula, mint látható áll $n = 2, 3, 4$, esetére; most teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha áll n-re, akkor áll $n+1$-re, tehát 5, 6, stb-re is. Nyilvánvaló:

$\cos(n+1)\alpha = \cos(n\alpha+\alpha) = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha$

Ha $\cos n\alpha$-t $\cos\alpha$-val s $\sin n\alpha$-t $\sin\alpha$-val szorzom és a kettőt egymásután beírom lesz:

$\cos(n+1)\alpha = \cos^{n+1}\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha \ldots$

$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k}\alpha +$

$- \binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha \ldots$

$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k-1}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k}\alpha +$

Mivel ismeretes $\binom{n}{2k+1} + \binom{n}{2k} = \binom{n+1}{2k+1}$ ebből s végre

$\cos(n+1)\alpha = \cos^{n+1}\alpha - \binom{n+1}{2}\cos^{n-1}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n+1}{4}\cos^{n-3}\alpha\sin^4\alpha +$

$\ldots (-1)^k\binom{n+1}{2k}\cos^{n-2k+1}\alpha\sin^{2k}\alpha \ldots$

Hasonlóképpen áll $\sin n\alpha$-ra is:

$\sin(n+1)\alpha = \sin(n\alpha+\alpha) = \sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha$

Itt is $\sin n\alpha$-t sorozatok $\cos\alpha$-val, $\cos n\alpha$-t $\sin\alpha$-val s a kettőt összeadjuk:

$\sin(n+1)\alpha = \binom{n}{1}\cos^n\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots\ldots$

$\ldots (-1)^k\binom{n}{2k+1}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k+1}\alpha -$

$+ \cos^n\alpha\sin\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots\ldots$

$(-1)^k\binom{n}{2k}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k+1}\alpha \ldots\ldots$

A jobb oldalt összegezve:

$$\sin(n+1)\alpha = \binom{n+1}{1}\cos^n\alpha\sin\alpha - \binom{n+1}{3}\cos^{n-2}\alpha\sin^3\alpha + \ldots (-1)^k\binom{n+1}{2k+1}\cos^{n-2k}\alpha\sin^{2k+1}\alpha$$

De az így nyert $\cos(n+1)\alpha$ és $\sin(n+1)\alpha$ is megfelel az általános formuláknak, csak n helyett mindenhova $n+1$-et kellett tennünk, vagyis a fölírt két tétel általános érvényű.

$\sin n\alpha$ és $\cos n\alpha$ segítségével kiszámítjuk $\operatorname{tg} n\alpha$ és $\operatorname{cotg} n\alpha$-t is:

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\sin n\alpha}{\cos n\alpha} = \frac{\binom{n}{1}\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha}{\cos^n\alpha - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha - \ldots}$$

A jobb oldal számlálóját és nevezőjét $\cos^n\alpha$-val osztva kapjuk hogy:

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5\alpha \ldots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \binom{n}{6}\operatorname{tg}^6\alpha + \ldots}$$

Hasonlóképen, ha $\frac{\cos n\alpha}{\sin n\alpha}$ értékét $\sin^n\alpha$-val osztjuk, nyerjük, hogy

$$\operatorname{tg} n\alpha = \frac{\binom{n}{0}\operatorname{cotg}^n\alpha - \binom{n}{2}\operatorname{cotg}^{n-2}\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{cotg}^{n-4}\alpha - \ldots}{\binom{n}{1}\operatorname{cotg}^{n-1}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{cotg}^{n-3}\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{cotg}^{n-5}\alpha - \ldots}$$

Ezekkel a fontosabb s gyakrabban előforduló trigonometriai formulákat megismertük, most még kimutatjuk, hogy ezen formulák segélyével bárnagy szögnek akármelyik függvényét tetszőleges pontossággal ki tudjuk számítani.

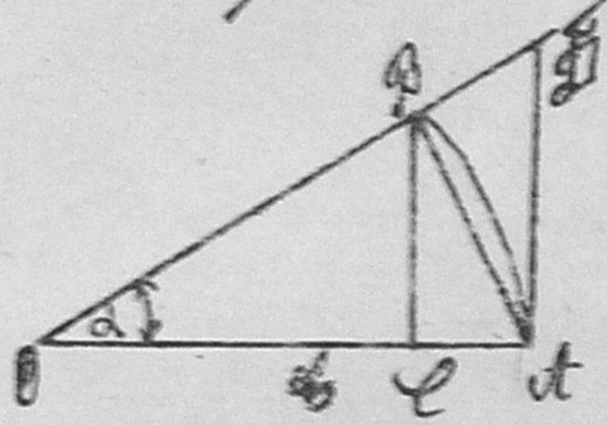
Szögfüggvények kiszámítása.

A szögfüggvények kiszámításánál elég a $\frac{\pi}{2}$ és 0 közt levő pozitiv hegyes szögek függvényeinek kiszámítására szorítkoznunk, mivelhogy tetszen szöget függvényeinek segélyével az összes többi szögfüggvényeit kitudjuk fejezni. Ismeretes

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$

Hogy a $\frac{\pi}{2}$ és 0 közt felvett szögek függvényeit kiszámíthassuk, határozzuk először háromszög magyarországi viszonyait a szög és annak függvényei közt. Tekintsük A-tól B-ig egységsugarú körívet, akkor, mint ismeretes

$BC = \sin\alpha$, $DA = \operatorname{tg}\alpha$



17. ábra.

A geometriai szemlélet mutatja, hogy $\triangle OAB < \text{szöct } OAB < \triangle OAD$ a megfelelő területeket véve

$\triangle OAB = OA \cdot \frac{BC}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$

szöct OAB : a kör területéhez $= \alpha : 2\pi$

a kör területe most π, mert $r = OA = 1$, tehát

szöct $OAB = \frac{\alpha}{2}$

$\triangle OAD = OA \cdot \frac{AD}{2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$

Ezek szerint

$$\frac{\sin\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$$

vagy

$$\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$$

Ezen egyenlőtlenség két utolsó tagja szerint

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > \alpha$ vagyis $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$

tehát $\alpha\cos\alpha < \sin\alpha < \alpha$ 1.)

Indirekt továbbá hogy $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$ alapján $\sin\frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$ miatt hogy azonban

$\cos\alpha > 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ vagyis

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} < \cos\alpha < 1 \qquad 2.)$$

Ha ezen egyenlőtlenségből $1 - \frac{\alpha^2}{2} < \cos\alpha$-t az 1.) egyenlőtlenségbe tesszük, akkor

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{2} < \sin\alpha < \alpha \qquad 3.)$$ egyenlőtlenséget kapjuk. A 2.), és 3.) egyenlőtl. szerint tehát $\cos\alpha$ és $\sin\alpha$ két határ közé szorítható s így egy bizonyos

pontossággig kiszámítható.

A $\sin\alpha$-ra felállított két határt most szűkebbre szabjuk azáltal, hogy kibővítjük az

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{6} < \sin\alpha < \alpha$$

egyenlőtlenség helyességét. Ezen kibővítés a következő:

Tudjuk, hogy $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha$,

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ tehát

$$\sin 3\alpha = 3(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha - \sin^3\alpha$$
$$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Ha ebbe az egyenletbe 3α helyett α-t, illetve α helyett $\frac{\alpha}{3}$-at tesszünk, kapjuk

$$\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3} \qquad 1.)$$

Tegyünk itt is α helyett $\frac{\alpha}{3}$-at, akkor

$$\sin\frac{\alpha}{3} = 3\sin\frac{\alpha}{3^2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^2} \qquad 2.)$$

Ismét α helyett $\frac{\alpha}{3}$ téve:

$$\sin\frac{\alpha}{3^2} = 3\sin\frac{\alpha}{3^3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^3} \qquad 3.)$$

. . . . . .

Így folytatva a behelyettesítéseket, nyerjük, hogy

$$\sin\frac{\alpha}{3^k} = 3\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3^{k+1}} \qquad (k+1).)$$

Az így nyert $(k+1)$ számú egyenletet rendre megszorozva $1, 3, 3^2, 3^3 \ldots 3^k$ számokkal a sorban következőképpen, nyerjük, hogy

$$\sin\alpha + 3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - 4\left(\sin^3\frac{\alpha}{3} + 3\sin^3\frac{\alpha}{3^2} + 3^2\sin^3\frac{\alpha}{3^3} + \ldots + 3^k\sin^3\frac{\alpha}{3^{k+1}}\right)$$

De tudjuk, hogy általában $\sin\alpha < \alpha$, azért itt a folytatásból ily váltogatást elkerülve a ~~jobb~~ bal oldal annál nagyobb lesz:

$$\sin\alpha > 3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - 4\left(\frac{\alpha}{3^3} + \frac{3\alpha}{3^6} + \frac{3^2\alpha^3}{3^9} + \ldots \frac{3^k\alpha^3}{3^{3(k+1)}}\right)$$

vagy

$$\sin\alpha > 3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - \frac{4\alpha^3}{3^3}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots \frac{1}{3^{2k}}\right)$$

A páratlan kitevőjű geometriai haladvány, melyet végtelenig gondolva, értéke a következő:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{32}} = \frac{3^2}{8}$$

Tehát $\sin\alpha > 3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - \frac{4\alpha^3}{3^3}\cdot\frac{3^2}{8}$

vagyis

$$\sin\alpha > 3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} - \frac{\alpha^3}{6} \qquad A_1$$

Most fejezzük ki, hogy a $3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}}$ kifejezés, ha k a végtelenbe nő egyenlő α-val. Hasonlítsa a 3, egyenlőtlenséget először reciprokai α-val

$$1 - \frac{\alpha^2}{2} < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$$

miből világos, hogy

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1 - \lambda\frac{\alpha^2}{2}$$ alakú, hol λ a 0 és 1 közötti helyes pozitiv szám. Ezen kifejezésből látható, hogy $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ az α szög kisebb értékeivel mindjobban közeledik az egyes felé, amit úgy fejezünk ki, hogy $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ limeszként közelebbről az egységhez, ha α a 0 felé tart:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

Ezen limesz egyenlet akkor is helyes, ha α helyett $\frac{\alpha}{3^{k+1}}$-et írunk, valahogy akkor a limesz

$k = \infty$-re apól, mert $\frac{\alpha}{3^{k+1}}$ $k = \infty$ mellett lesz 0, tehát:

$$\lim_{k=\infty}\frac{\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}}}{\frac{\alpha}{3^{k+1}}} = 1 \text{ vagy}$$

$$\lim_{k=\infty}\frac{3^{k+1}}{\alpha}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} = 1$$

Itt $\frac{1}{\alpha}$ a limesztől független, tehát a limesz jel elé írható vagy így

$$\frac{1}{\alpha}\lim_{k=\infty} 3^{k+1}\sin\frac{\alpha}{3^{k+1}} = 1$$

vagy:

$$\lim_{k=\infty} 3^{k+1} \sin \frac{\alpha}{3^{k+1}} = \alpha$$

Az így nyert értéket a 3.) -ik egyenlőtlenségbe téve kapjuk, hogy

$$\sin \alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$$

Mely egyenlőtlenség a 3.)-mal combinálva $\sin \alpha$-ra nézve a két keresett határt szolgáltatja

$$\alpha > \sin \alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$$

Itt még meg kell jegyeznünk, hogy szigorú lépésnél a kitevő jelen és alakjának mellőzésével a második > jel, mellett az egyenlőség jel használatát is meg kell engednünk, mert pl. bár

$1 - \frac{1}{n} < 1$, azért nem követhetjük, hogy

$\lim_{n=\infty} (1 - \frac{1}{n}) < 1$ sőt egyenesen

$$\lim_{n=\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1$$

E szerint szigorúan csak az elvégzett bizonyítás során támaszkodva azt kell írnunk, hogy

$$\alpha > \sin \alpha \geqq \alpha - \frac{\alpha^3}{6} \qquad 4.)$$

- - - -

$0{\cdot}0168977 > \sin\frac{\pi}{180} > 0{\cdot}168977 - \frac{1}{750000}$
de ebből láthatjuk, hogy az egyenlőtlenség két szélső tagja 5 számjegyben egyezik; mert
$1 : 750000 = 0{\cdot}0000001\ldots$ tehát $\sin\frac{\pi}{180}$ is öt tizedesnyi pontossággal meg van határozva
$$\sin\frac{\pi}{180} = 0{\cdot}01689\ldots$$

— — — — —

Most kimutatjuk, hogy minden trigonometriai függvény $\frac{1}{10}$ tetszőleges pontosságával, tehát nem bizonyos, hanem előírt pontossággal kiszámítható! Bizonyos szögekre nézve ez a tétel evidens. Így pl. a $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ egyenletekből α helyett $\frac{\pi}{2}$ írva:
$\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Minthogy pedig $\sqrt{2}$ tetszés szerinti pontossággal kiszámítható, ezért $\frac{\pi}{4}$ függvényei is előírt pontossággal határozhatók meg.

Ezen két egyenlet segítségével még rendre kiszámíthatók $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32} \ldots \frac{\pi}{2^k}$ szögek függvényei is. De az összes szögek függvényei is kifejezhetők tetszőleges pontossággal, mert az összes szögek a fentiekből $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} \ldots\right)$ stb. „szögekből" egyszerű összeadás és kivonás által összerakhatók, s az így nyert összeg, vagy különbség alakban írt szög függvényeire alkalmazhatjuk a trigonometriai összeadási tételt.
$$[\sin(\alpha \pm \beta),\ \cos(\alpha \pm \beta)]$$
Hogy az összes szögek $\frac{1}{2^k}$ alakú szögekből összerakhatók, azt a kör: képben láthatjuk be. Válasszuk szögegységül a derékszöget $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ s fejezzük ki a szög mértékszámát a 2-es számrendszerben. Világos, hogy minden $\frac{\pi}{2}$-nél kisebb szögnek derékszög egységben vett mértékszáma valódi

tört lesz, tehát 2-es számrendszerben így alakú:

$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_n}{2^4} + \ldots\ldots$ hol $a_1, a_2, \ldots$ vagy 0 vagy 1. Ha az így nyert számot szorzom $\frac{\pi}{2}$-vel, akkor megkaptam a mérőszámot deciksugárban kifejezve:

$\alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_n}{2^n} + \ldots\ldots\right)$; ami pedig világosan mutatja, hogy a tetszőlegesnek vett a szög csupán $\frac{\pi}{2^k}$ alakú szögekből van összeadva. Ha mármost az itt előforduló sort elég nagyon vesszük, akkor elérhetjük, hogy a szög függvényei tetszőleges pontossággal lesznek meghatározva. Példaképpen fejezzük ki $\frac{\pi}{3}$-ot $\pi\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots\ldots\right)$ alakban. $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$; $\frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$ stb.

Tehát $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \ldots\ldots\right)$ miből

$\frac{\pi}{3} = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \ldots\ldots\right)$

A függvény értékének meghatározásánál elkövetett hibák nagyságáról.

Legyen a egy pos. hegyes szög a lehető adva E igen kis irányszám, melynél kisebb hibát szabad elkövetnünk, de nagyobbat nem. A számolás folyamán álljunk meg a szöget kifejező convergens sor azon tagjánál, melynek utáni a maradék tagok összege $\eta < \varepsilon_1$. Tehát $\alpha = \alpha_1 + \eta$ Fejtsük ki annak sinusát

$\sin\alpha = \sin(\alpha_1 + \eta) = \sin\alpha_1 \cos\eta + \cos\alpha_1 \sin\eta$

Nagyobbítsuk meg most a jobboldalt azáltal, hogy $\cos\eta = 1$, és $\alpha_1 = 1$ és $\sin\eta = \eta$ behelyettesítéseket eszközöljük:

$\sin\alpha < \sin\alpha_1 + \eta$

Itt α_1 oly szög, mely kettős alapszámú törttel van kifejezve s mint látjuk, ezt meg tudjuk határozni tetszőleges ε_2 pontossággig úgy, hogy

$\sin\alpha_1 = \sigma + \eta_1$, hol $\eta_1 < \varepsilon_2$ E szerint

$\sin\alpha < \sigma + \eta + \eta_1$, vagyis az elkövetett hiba

$\sin\alpha - \sigma < \eta + \eta_1$

Ha ε_1 és η_1-et úgy választottuk meg, hogy $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$ és $\eta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ akkor elértük a célt: $\sin\alpha$-t tetszés szerinti ε pontossággal tudtuk kiszámítani: az elkövetett hiba kisebb, mint ε

$(\sin\alpha - \sigma < \varepsilon)$

Megjegyezzük, hogy az itt elkövetett számolás lényegileg igen hasznos; itt csak a függvény értékének tetszőleges pontosságig való kiszámítási módjának lehetőségét akartuk kimutatni. A praktikában a függvénytáblák kiszámításánál a sorbafejtést használják.

Kimutatjuk, hogy a szög cosinus függvényét is meg tudjuk határozni adott pontosság szerint. Legyen a egy pozitív szög és ε azon kis szám, melynél nagyobb hibát nem szabad elkövetnünk a szög függvényének kiszámításánál. Itt is $\alpha = \pi\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \ldots\right)$ végtelen sorral van előállítva. Ebből határozzuk meg α-t úgy, hogy a nálánál eggyel nagyobb α_1 számot vesszük:

$\alpha = \alpha_1 - \eta$ ebből $\eta < \frac{\varepsilon}{2}$ Ezt azáltal érjük el, hogy a sorban $\frac{a_n}{2^n}$ helyett az ennél nagyobb $\frac{a_{n+1}}{2^n}$-t vesszük, amikor is az elkövetett hiba $\eta < \frac{1}{2^n}$ Fogjuk most az így meghatározott $\alpha = \alpha_1 - \eta$ szög cosinusát:

$$\cos\alpha = \cos(\alpha_1 - \eta) = \cos\alpha_1 \cos\eta + \sin\alpha_1 \sin\eta;$$

egyszerűsítsük meg a jobboldalt azáltal, hogy $\cos\eta$ helyett 1-et és $\sin\alpha_1$ helyett a nagyobb $+\eta$-t írjuk, továbbá $\sin\eta$ helyett η-át, akkor

$$\cos\alpha < \cos\alpha_1 + \eta$$

Itt α_1 oly szög, melyet a kettős alapszámú rendszerben tetszőleges $\frac{\varepsilon}{2}$ pontossággal megtudunk határozni, tehát

$$\cos\alpha_1 = c + \eta_1 \qquad \text{hol } \eta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

És szerint $\cos\alpha < c + \eta + \eta_1$, vagy $\cos\alpha - c < \varepsilon$

Tehát c oly közel van $\cos\alpha$ értékéhez, hogy ezen érték helyett véve az elkövetett hiba kisebb, mint a tetszőlegesen előírt kis ε mennyiség.

II. Azt el lehet érni a tg. és ctg. függvényeknél is, az előbbi két függvény (sin, cos) segítségével. A tg és ctg-nél is, is egy törttel van dolgunk, melyet tetszőlegesen pontossággal meg tudunk határozni, ha a tört számlálóját és nevezőjét bizonyos pontossággal ki tudjuk számítani. Ezt bizonyítjuk:

Legyen a sokszorozó tört $\frac{a}{b}$ és legyen $a = a_1 + \eta_1$ és $b = b_1 + \eta_2$ hol. η_1, η_2-öt elhanyagoljuk, akkor az elkövetett hiba $\frac{a}{b} - \frac{a_1}{b_1}$. Kimutatjuk, hogy ez a hiba kisebbé tehető az előírt ε mennyiségnél. Legyen:

$\frac{a}{b} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1+\eta_1}{b_1-\eta_2} - \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_1\eta_1+a_1\eta_2}{b_1(b_1-\eta_2)}$ Ha a szám $a_1 < \alpha_2$ számok közt felsőt, b pedig β_1 és β_2 számok között alsót jobboldalt nyilvánvalóan megnagyobbítottam ha írom, hogy

$\frac{a}{b} - \frac{a_1}{b_1} < \frac{\beta_2\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2}{\beta_1\beta_2}$ vagy másként írva

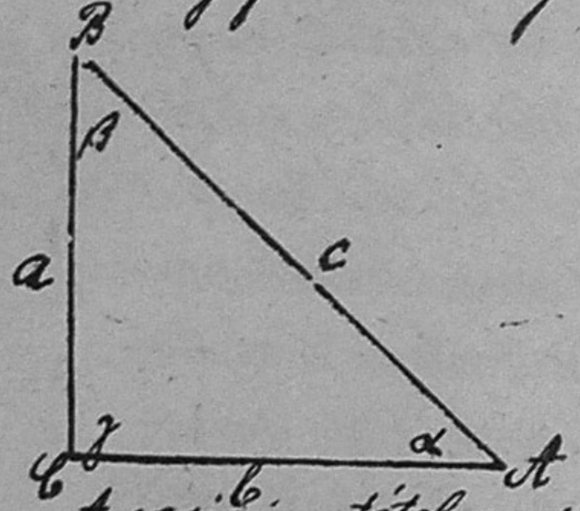
$\frac{a}{b} - \frac{a_1}{b_1} < \frac{\beta_2\varepsilon_1}{\beta_1^2} + \frac{\alpha_2\varepsilon_2}{\beta_1^2}$ Az ε_1 és ε_2, is mennyiségeket úgy választhatom meg, hogy $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon\beta_1^2}{2\beta_2}$ és $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon\beta_1^2}{2\alpha_2}$ legyen vagyis $\frac{\beta_2\varepsilon_1}{\beta_1^2} = \frac{\varepsilon}{2}$ és $\frac{\alpha_2\varepsilon_2}{\beta_1^2} = \frac{\varepsilon}{2}$ legyen.

Ekkor azt is elértem, hogy

$\frac{a}{b} - \frac{a_1}{b_1} < \varepsilon$, ami bizonyítandó volt. Ezzel a tétellel egyúttal azt is bebizonyítottnak vehetjük, hogy a tg és ctg is előírt pontossággal meghatározható.

Gyakorlati alkalmazások.

Az eddigi tételeket fogjuk ezután alkalmazni geometriai alakokra. Így lássuk legelőbb a derékszögű háromszögeket. Jelöljük az oldalakat a, b, c.- vel a szemben levő szögeket α, β, γ -val. Itt $\gamma = \frac{\pi}{2}$, tehát az ismeretes $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ relatio itt így alakul: $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$. A sinus tétel itt így alakul: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = c$ (mert $\sin\gamma = \sin\frac{\pi}{2} = 1$)



vagyis $a = c\sin\alpha = c\cos\beta$, mert $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$

$b = c\sin\beta = c\cos\alpha$, mert $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$

A cosinus tétel pedig így alakul: $c^2 = a^2 + b^2$, mert $\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Ezen tételek segítségével a derékszögű háromszög két alkotórészének megadásával (az egyik alkotó résznek oldalnak kell lennie, mert két szög nem független egymástól) a többit kiszámíthatjuk.

Adva van: a, b	$a\ c$	a, α $\alpha < \frac{\pi}{2}$	$\alpha < \frac{\pi}{2}$ c, α
$tg\alpha = \frac{a}{b}$	$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$	$b = a\,ctg\,\alpha$	$a = c\sin\alpha$
$c = \sqrt{a^2+b^2}$	$b = \sqrt{c^2-a^2}$	$c = \frac{a}{\sin\alpha}$	$b = c\cos\alpha$
vagy	vagy		vagy
$c = \frac{a}{\sin\alpha}$	$b = \sqrt{(c+a)(c-a)}$	$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$	$b = a\,ctg\,\alpha$

Az egyenesen háromszögek megoldásánál a magasság vonal megfelelő használatával elvégezhető háromszög megoldásáról van szó, azért azt itt mellőzzük.

Általános háromszög megoldása.

Az általános háromszögek megoldásánál általában szükséges, mások közül egyet előbbinek kell lennie, mintha egy a háromszögből két oldal a hozzájuk is meg van határozva. A háromszögtétel segítségével a 3. oldalt vesszük fogyatékosnak. Legyen ismeretes a 3 oldal a, b, c, akkor a cos tételből $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ Ezen az a két megoldási esetet különösen szükséges, hogy eldönthető legyen. Általában egy $\sin\varphi$ két szöget határoz, ha $s+F>0$, $s-F>0$ Tehát itt is egyenlőnek $2ab+a^2+b^2-c^2$ kell, hogy $>$ mint nagyobb legyen, vagyis $(a+b)^2-c^2>0$, a bal oldalt szorzattá alakítva $(a+b+c)(a+b-c)>0$ kell legyen, amit úgy mondjuk, hogy $(a+b)>c$ (α)

Másképpen kell $2ab-a^2-b^2+c^2>0$ kell legyen, vagyis

$c^2-(a-b)^2>0$; $(c+a-b)(c+b-a)>0$ tehát kell, hogy $c+a>b$ és $c+b>a$ legyen. Ezen a feltétel az (α) feltételből egyúttal úgy is mondható ki, hogy a háromszögnek két oldalának összege nagyobb, mint a harmadik oldala. Tehát ha a 3 oldalt nem tételnek meg feltételeit adjuk meg, akkor a fent jelzett háromszöget lehetetlen megoldani. Így tehát a cos tétel segítségével jogunk van és valóságosnak az összes megoldást, de az összefüggést a logaritmusos számításnál nem alkalmas, azért azt még át kell alakítanunk: Tudjuk, hogy:

$1-\cos\gamma = 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;

$\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1 = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;

$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}$;

$2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}$ amelyből fogyatékos:

$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$ és $2\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{2ab}$

Ha $a+b+a=2s$ jelöljük, akkor $(a+b-c)=2(s-c)$; $(a-b+c)=2(s-b)$ és $(-a+b+c)=2(s-a)$ Tehát

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \text{ és } \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

Ezen az alak most már alkalmazható lesz, de hogy kevesebb számolással minél a kívánt adatot megkaphassuk, vegyük a sin és az összefüggést: $\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$; használjuk fel most ezt,

hogy:

$tg\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$ és $tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

2.) eset. Legyen adva két oldal és az általuk bezárt szög: a, b, γ keresendő tehát c; α, β. Számítsuk először a két szöget:

$\alpha+\beta+\gamma = \pi$ tehát $\alpha+\beta = \pi-\gamma$ s így a két szög összege is ismeretes.

A két szög különbségét így kapjuk meg: $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ vagy

$1+\frac{a}{b} = 1+\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$; $\frac{a}{b}-1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}-1$; $\frac{a+b}{b} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\beta}$;

$\frac{a-b}{b} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\beta}$ Ezerint $\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}$

(Lásd a 12.) egyenletet) De $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$ is ismeretes érték s így

$tg\frac{\alpha+\beta}{2} = cotg\frac{\gamma}{2}$ É zerint $tg\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\,cotg\frac{\gamma}{2}$

Ez az egyenlet csak egy megoldást ad, mert $\frac{\alpha-\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$ kell legyen.

Ha így most már ismerjük $\alpha-\beta$ és $\alpha+\beta$-t, akkor α és β jómmyen kiszámítható. A szögek ismeretével a harmadik oldal is könnyen kiszámítható. Ismert hogy $\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$, azért $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$

3.) eset. Legyen adva egy oldal s két szög: a α β. Ekkor már a harmadik szög is ismeretes, mert $\alpha+\beta+\gamma = \pi$, miből $\gamma = \pi-(\alpha+\beta)$, tehát $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$. A szinus tétel alkalmazásával az oldalak is kiszámíthatók: $b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{a\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

4.) eset. Legyen adva két oldal s az egyikkel szemben fekvő szög: a, b, α. Itt több eset lehetséges.

I. $a > b$, akkor kell, hogy $\alpha > \beta$ legyen. Ekkor a sin tételből: $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$. Ez a megoldás feltétele, mert most $\frac{b}{a}$ valódi tört így $\frac{b\sin\alpha}{a}$ is az, továbbá β hegyes szög kell legyen, mert $\beta < \alpha$, s a háromszögben két tompaszög nem lehet. E szerint $\sin\beta$-nak ebben az esetben csak egy megoldása van.

II. Ha $a = b$, akkor $\alpha = \beta$, tehát β-ra nézve így is csak egy megoldás van. III. Ha $a < b$, tehát $\alpha < \beta$, akkor $\frac{b}{a} > 1$, tehát $\frac{b\sin\alpha}{a} = \sin\beta$ is nagyobb lehet egynél, amely esetben nincs megoldás. Ha tehát

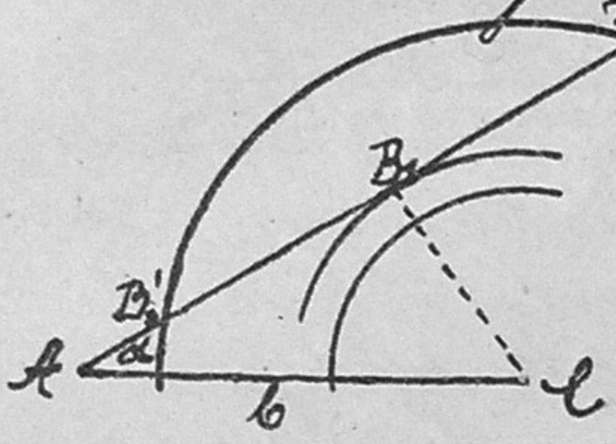
a.) $b\sin\alpha > a$, akkor nincs megoldás

b.) $b\sin\alpha = a$, akkor 1 megoldás van; $\beta = \frac{\pi}{2}$

c.) $b\sin\alpha < a$, akkor 2 megoldás van, mert ebben az esetben β szög sinusa a szöget két értelmű leg határozza meg.

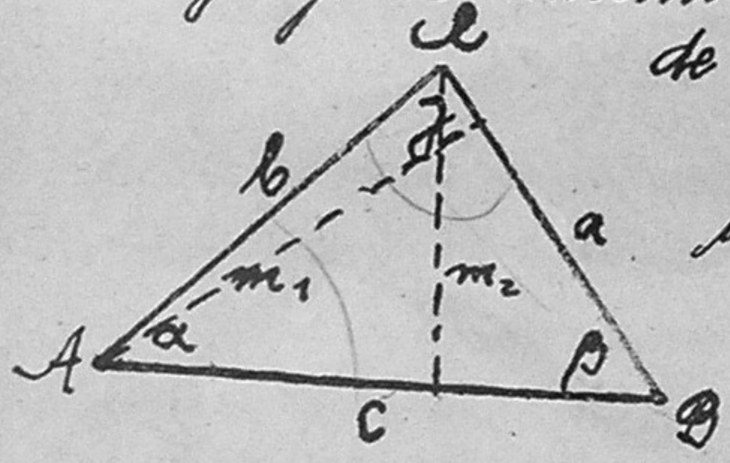
A β szög ismeretében az 4.) esetben az $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ relációból meghatá-

vonhatjuk, γ-t is, aztán a sin tétel segítségével az ismeretlen c oldalt. Természetesen a III. c.) esetben négy a γ szögre, ezzint a c oldalhoz tartozó két megoldását kapjuk: $\gamma_1 = \pi - (\alpha+\beta_1)$, $\gamma_2 = \pi - (\alpha+\beta_2)$ és ezen négy esetnél fellépő megoldások lehetőségét és mibenségét a geometriai szemléletből is igazolják. Így a 4.) esetben, ha $a < b$, akkor a szerint, amint az a számnak b-ből húzott normalisa: $n = b \sin\alpha$ a tól különböző, vagy egyenlő, a-szerint a megoldások száma is változik. Ha a b ből b sugarú körrel az oldal egyenlő $b \sin\alpha$-val, akkor a megoldást az AB_1C $\triangle$ adja. Ha $a < b \sin\alpha$, akkor a körív nem metszi a c szárat, tehát nincs megoldás. Ha végre $a > b \sin\alpha$, akkor a körív két pontban metszi a c szárat, tehát 2 megoldás van.



A háromszög területe.

Jelöljük a háromszög területét $\triangle$-val, akkor $\triangle = \frac{a m_1}{2} = \frac{c m_2}{2}$



de $m_1 = c \sin\beta = \beta \sin\beta$ és

$m_2 = b \sin\alpha$ $\triangle = \frac{bc \sin\alpha}{2}$

Más alakban, minthogy $b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$ ab lesz:

$$\triangle \quad \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma}$$

Tisztán oldalakkal kifejezve:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

és

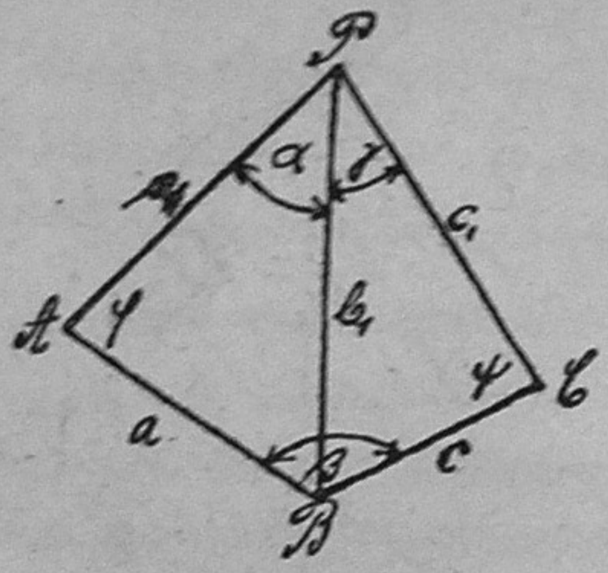
$$2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ vagyis

$$\triangle = \frac{ab \sin\gamma}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ Ez az úgynevezett

Héron féle formula. Betéve az $s = \frac{a+b+c}{2}$ értékét, így alakul lesz: $\triangle = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

Pothenot feladata.

Ezen feladat így szól: Mérjük meg a P-pontnak három adott ponttól (A, B, C) való távolát, ha ismerjük α, β, γ szögeket,



s azt a és c hosszat. A megoldásnál először a φ és ψ szögeket számítjuk ki:
$\varphi+\psi+\alpha+\beta+\gamma=2\pi$ miből $\varphi+\psi=2\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$
Most határozzuk $\varphi-\psi-t$:
A két háromszögből: $b_1=a\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}=c\frac{\sin\psi}{\sin\gamma}$
tehát $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{c\sin\alpha}{a\sin\gamma}$. A 37 oldalon található levezetéshez analog
$\frac{\sin\varphi-\sin\psi}{\sin\varphi+\sin\psi}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}=\frac{c\sin\alpha-a\sin\gamma}{c\sin\alpha+a\sin\gamma}$, de

$\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ tehát

$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{a\sin\gamma-c\sin\alpha}{a\sin\gamma+c\sin\alpha}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

Így módon meg tudjuk határozni $\varphi-\psi-t$, tehát külön $\varphi-t$ és $\psi-t$. Mivel φ és ψ külön-külön kisebbek π-nél, azért $\varphi-\psi$ is kisebb π-nél, tehát a megoldás egyértelmű lesz. Az utóbbi formulát logarithmus számításra is alkalmassá tehetjük, ugyanis:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\frac{1-\frac{c\sin\alpha}{a\sin\gamma}}{1+\frac{c\sin\alpha}{a\sin\gamma}}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Legyen $\frac{c\sin\alpha}{a\sin\gamma}=\operatorname{tg}\lambda$, (mely értéke logarithmus segítségével meghatározható) akkor $\frac{1-\operatorname{tg}\lambda}{1+\operatorname{tg}\lambda}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\lambda\right)$ tehát $\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\lambda\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$

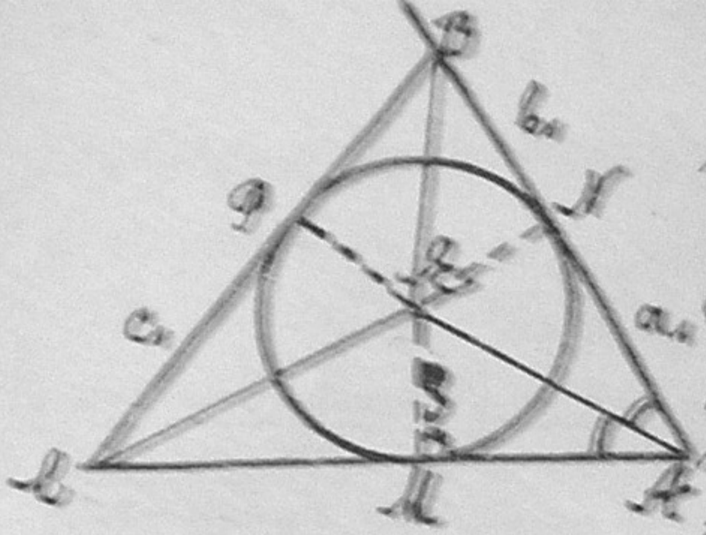
Mely formulára most már a log is alkalmazható. – φ és ψ ismeretével a keresett távolságok lesznek:

$a_1=a\frac{\sin(\pi-(\psi+\alpha))}{\sin\alpha}=a\frac{\sin(\psi+\alpha)}{\sin\alpha}$; $b_1=\frac{a\sin\varphi}{\sin\alpha}$

$c_1=c\frac{\sin(\pi-(\psi+\gamma))}{\sin\gamma}=c\frac{\sin(\psi+\gamma)}{\sin\gamma}$.

A háromszöghöz vonatkozó nevezetesebb tételek.

Egy szögnél a szögfelező egyenes azon pontok geometriai helye, mely pontok a szög két szárától egyenlő normalis távolságra vannak. Egy háromszög két szögfelezőjét meghúzva, metszőpontul egy oly E pontot kapunk, mely a szögfelezőt előbb említett tulajdonságánál fogva a háromszög mindhárom oldalától



egyenlő távolsága van, tehát a háromszögbe írható körnek középpontját adhatja. Hogy a háromszög harmadik szögfelezője is ezen az S-ponton megy keresztül azt az $\triangle ABM$ és $\triangle ANB$ háromszögek congruenciájából könnyen láthatjuk. Hasonló $\triangle ABM \cong \triangle ANB$ felhasználásával a fenti szögek egyenlőségéből, vagyis AS szögfelezőjéből következik a szóban forgó tétel.

Számítsuk ki az így meghatározott ρ háromszögbe írható körsugarát (ϱ) s az érintési pontoknak a csúcsoktól való távolát.

Nyilvánvaló, hogy a háromszög területe így valahogy összeg:

$\Delta = \triangle ABS + \triangle BCS + \triangle CAS$ és $\triangle ABC = \frac{cs}{2}$, $BCS = \frac{as}{2}$, $CAS = \frac{bs}{2}$

azaz $\Delta = s\frac{a+b+c}{2} = s\rho$ miből $s = \frac{\Delta}{\rho}$ adja a beírható kör sugarát. Az érintési pontoknak a csúcsoktól való távolát jelöljük a következő betűkkel $PB = BN = b_1$, $AN = AM = a_1$, $CP = CM = c_1$

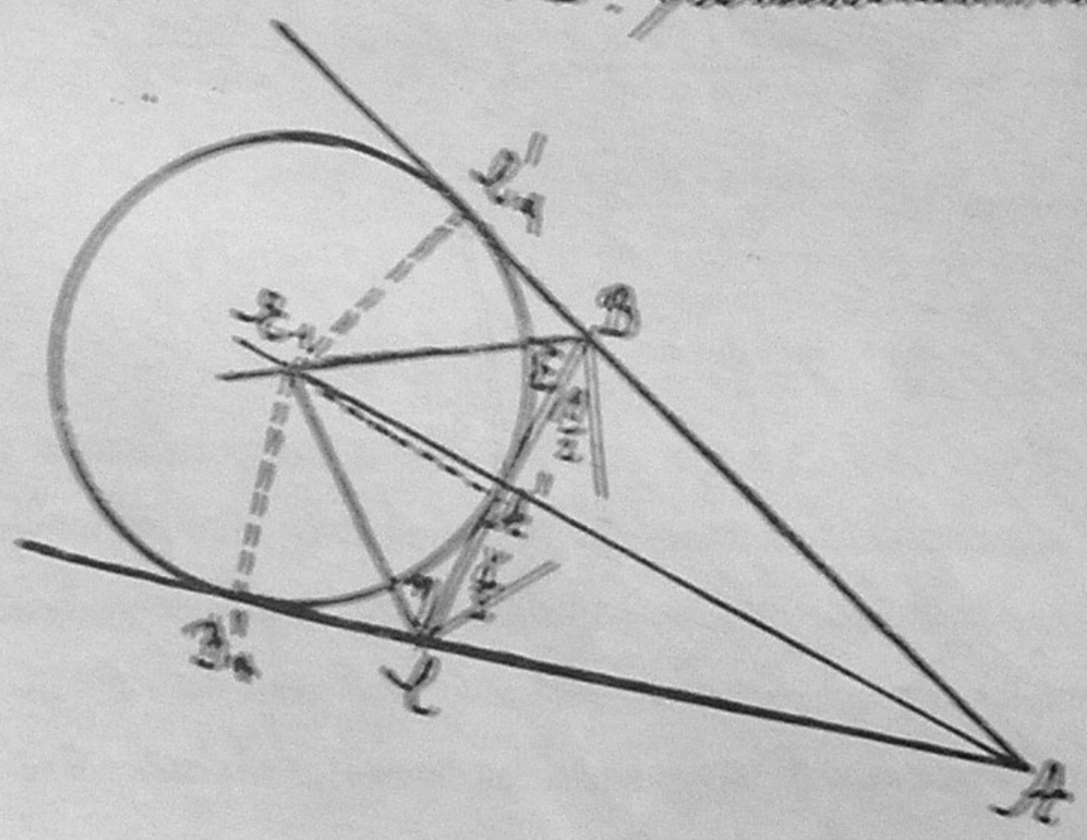
Ekkor azonban

$$\left.\begin{aligned} b_1 + c_1 &= a \\ c_1 + a_1 &= b \\ a_1 + b_1 &= c \end{aligned}\right\}$$

a háromismeretlenes egyenletet összegezve: $2(a_1+b_1+c_1) = a+b+c$ vagyis $a_1+b_1+c_1 = s$. Ezenkívüli azonban egyenletet az előbbi háromból, amelyet nyerjük, hogy

$a_1 = s-a$, $b_1 = s-b$ és $c_1 = s-c$

Egy háromszög külső szögeihez is meghatározható a szögfelezők metszéspontja külső szögfelezőinek háromszöge. A külső szögfelező a háromszög egy oldalával szemközti belső szögfelezőjével alkotott szögét adják. A háromszög két-két szomszédos csúcsából húzott külső szögfelezők találkozási pontjainak összekötésével, meghatározhatjuk ezt a háromszöget. Ez a következő ábrán látható:



Ez a háromszög is egyenlő szögű, mert $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2} = \pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$.

ténylegkisebb két darószögnél, tehát a két külső szögfelező metszi egymást. Ha ezen E_1 metszőpontból összekötjük a szögpontokkal, akkor az E_1C' és E_1B' congruenciájából következik, hogy a meghúzott E_1 egyenes az A-nál lévő szög első szögfelezője. Az így nyert E_1 pont szintúgy egyenlő távolra van mind a háromszög oldalaitól, tehát szintúgy egy érintő kör középpontja. Hasonló úton nyerhetjük még az E_2, E_3 egy-egy körülírt érintő kör középpontját is, ha a 2 külső és egy belső szögfelezőt másként választjuk. Jelöljük az így nyert körök sugarait $\varrho_1, \varrho_2 \varrho_3$ — mal. Minthogy ABC háromszög területe $\Delta = AB E_1 + AC E_1 - BC E_1 = \frac{c \cdot \varrho_1}{2} + \frac{b \varrho_1}{2} - \frac{a \varrho_1}{2}$ miért $\varrho_1 = \frac{\Delta}{s-a}$ Hasonlóképen nyerhetjük még hogy

$$\varrho_2 = \frac{\Delta}{s-b} \quad \text{és} \quad \varrho_3 = \frac{\Delta}{s-c}$$

Jelöljük a körök érintési pontjait A', B', C'; A'', B'', C''; A''', B''', C'''; továbbá $AC' = AB' = a'$; $BC' = BA' = b'$; $CB' = CA' = c'$ stb, akkor

$$\left.\begin{aligned} b'+c' &= a \\ a'-b' &= c \\ a'-c' &= b \end{aligned}\right\}$$

E három egyenletet összeadva, nyerjük, hogy $2a' = a+b+c$ vagyis $a' = s$. Combinálva ezen egyenletet az előbbi háromnal, rendre nyerjük, hogy $b' = s-c = c_1$ és $c' = s-b = b_1$. Hasonlóképen nyerjük a'', b'', c'' és a''', b''', c''' értékeit.-

Ezen négy érintőkör sugarai közt igen érdekes relatiókat fejthetünk ki is

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3} = \frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta} = \frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}$$

$a+b+c = 2s$ és $\frac{s}{\Delta} = \frac{1}{\varrho}$, tehát De

$$\underline{\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}}$$

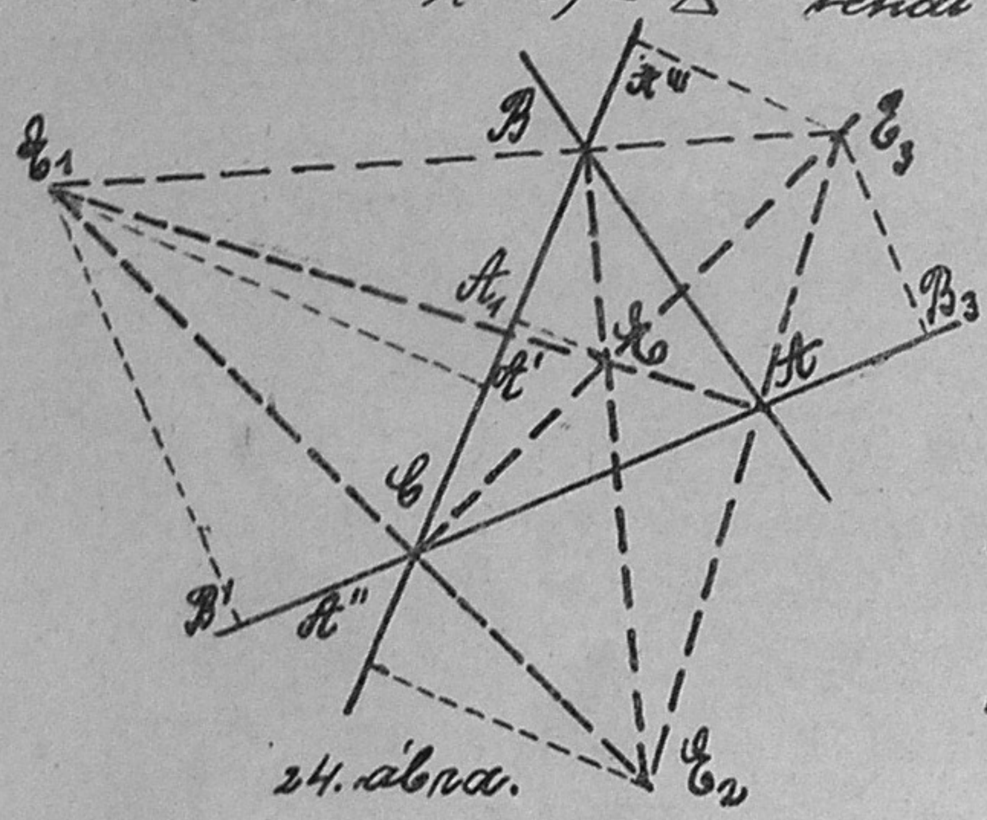
Ha a négy sugarat összeszorozzuk:

$$\varrho\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3 = \frac{\Delta^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

A Héron formula szerint azonban

$$s(s-a)(s-b)(c-c) = \Delta^2 \text{ tehát}$$

$$\underline{\Delta = \sqrt{\varrho\, \varrho_1\, \varrho_2\, \varrho_3}}$$



24. ábra.

Legyen a négy érintőkör középpontja E, E_1, E_2, E_3, sugara $\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \varrho_3$, érintsék a kört az a oldalt A_1, A', A'', A''' pontokban, akkor

$$BA_1 = b_1 = s-b = c' = CA'$$
$$BA''' = b''' = s-a = c'' = CA''$$

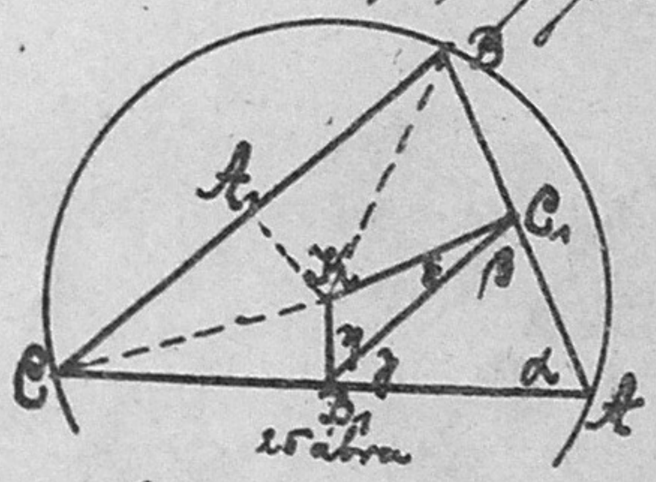
Hasonló arányokat kapunk a másik két oldalra nézve is, tehát kimondhatjuk, hogy az érintési pontok az oldalakon az oldal felezőpontjához képest szimmetrikusan

vannak elhelyezve. —

Minthogy $\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}\perp\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_3$; $\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}\perp\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_3$; $\mathcal{E}_3\,\mathcal{E}\perp\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2$ azért mondhatjuk, hogy az $\mathcal{E}_1\,\mathcal{E}_2\,\mathcal{E}_3$ pontok olyan háromszöget alkotnak, melynek magasság pontja $\mathcal{E}$.

A háromszög körül írható körről.

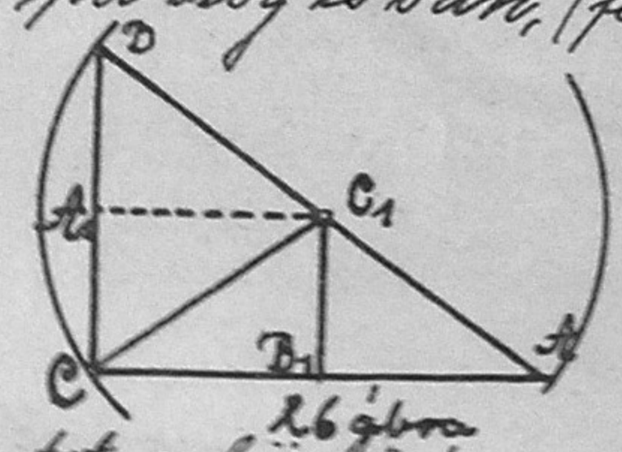
Ha az $A\,B\,C\,\triangle$ két oldalát felezzük, s a felező pontokban merőlegeseket állítunk, akkor az ismeretes Euklides féle postulatumon értelmében a két merőleges metszi egymást. U. is, ha a háromszög hegyesszögű, akkor meghúzva a $B_1\,C_1$ egyenest a keletkezett $\varepsilon+\eta=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\pi-(\beta+\gamma)=\alpha$ s $\alpha<\pi$.



25 ábra

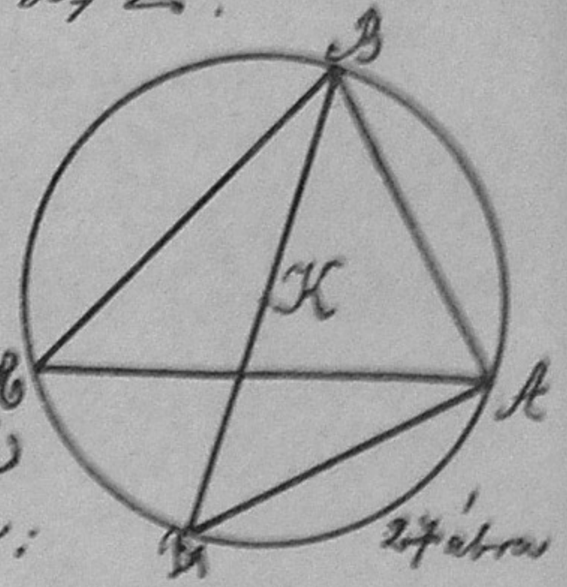
A merőlegesek metszőpontja a K pont, mivel a három éricától egyenlő távolra van, tehát az A, B és C pontokon átmenő kör középpontja. Ha a K pontot összekötjük a B C oldal felező pontjával, akkor a nyert $A_1\,K$ egyenes is merőleges a harmadik ($B\,C$) oldalra, mert $C\,K\,A_1\,\triangle\cong B\,K\,A_1\,\triangle$.

Ha a háromszög derékszögű, akkor a K pont összeesik C_1 ponttal. U. is a $C\,C_1\,B_1$ és $A\,C_1\,B_1$ háromszögek congruentiájából következik, hogy $C\,C_1=A\,C_1=B\,C_1$. — Ha a háromszögben tompa szög is van, (ferdeszögű"), akkor K pont a háromszögön kívül esik, (28. ábra) mert a $B_1\,C_1$ ezen oldalán:



26 ábra

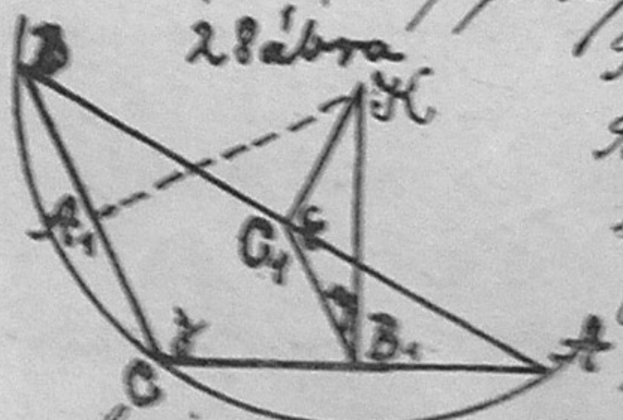
$\varepsilon+\eta=\frac{\pi}{2}+\beta+\gamma-\frac{\pi}{2}=\gamma+\beta=\pi-\alpha<\pi$



27 ábra

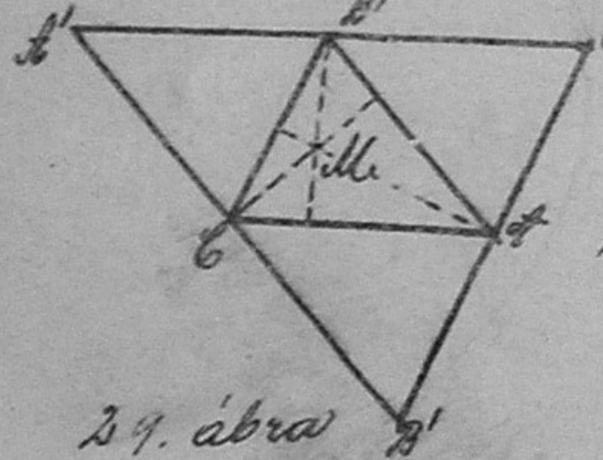
Határozzuk meg most a körülírható kör sugarát. E végből kössük össze az egyik csúcspontot a kör középpontjával s a nyert B_1 pontot A-val, akkor (27 ábra) $B\,B_1\,A\,\measuredangle=B\,C\,A\,\measuredangle=\gamma$ (kerületi szögek) A nyert $B\,B_1\,A\,\triangle$-ből, mely derékszögű (Thales tétele):

$\sin\gamma=\frac{c}{2r}$ vagyis $2r=\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ (sinustétel!) Ha $\frac{c}{\sin\gamma}$ tört alsóját és felsőjét $a\,b$-vel megszorozzuk, s tekintetbe vesszük hogy $a\,b\sin\gamma=2\,\Delta$, akkor nyerjük, hogy $2rab=\frac{abc}{2\Delta}$ vagyis $r=\frac{abc}{4\Delta}$



A háromszög magasság pontja.

Hogy a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást az ℓ"öv. lépésben bizonyítjuk. Mindegy csúcson keresztül a szemben lévő

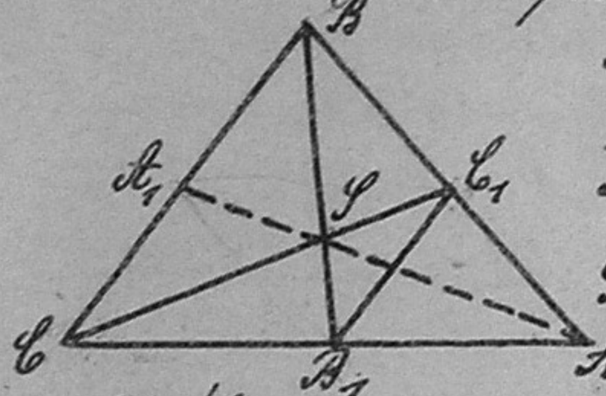


24. ábra

oldallal párhuzamos egyenest húzunk. Így mindig a t'B'C' háromszög oldalait az t, B, C, pontok épen felezik, mivel B'C' = Ct = At' = B stb. Tehát az t'B'C' háromszög körülírható körének közép pontja és az t B C háromszög magasság pontja egybe esik, mivel az t'B'C' háromszög oldalainak felező pontjaiban állított merőlegesek az t B C △ magasságvonalaival is egy ösek. Ezzel a tétel be van igazolva. Itt is három esetet lehet megkülönböztetni, aszerint, amint a háromszög hegyes-, derék-, vagy tompaszögű.

Súlypont.

Az oldalak „felező" pontjaiból a szemben fekvő „csúcsokhoz húzott egyeneseket közép egyeneseknek nevezik. Bebizonyítjuk, hogy a háromszög 3 középegyenese egy pontban (súlypont) metszik egymást. Húzzuk meg 2 közép vonalat s közülök ösze B_1-et C_1-gyel. Kimutatjuk, hogy a harmadik középvonal is az ket első metszőpontján megy át.



30. ábra

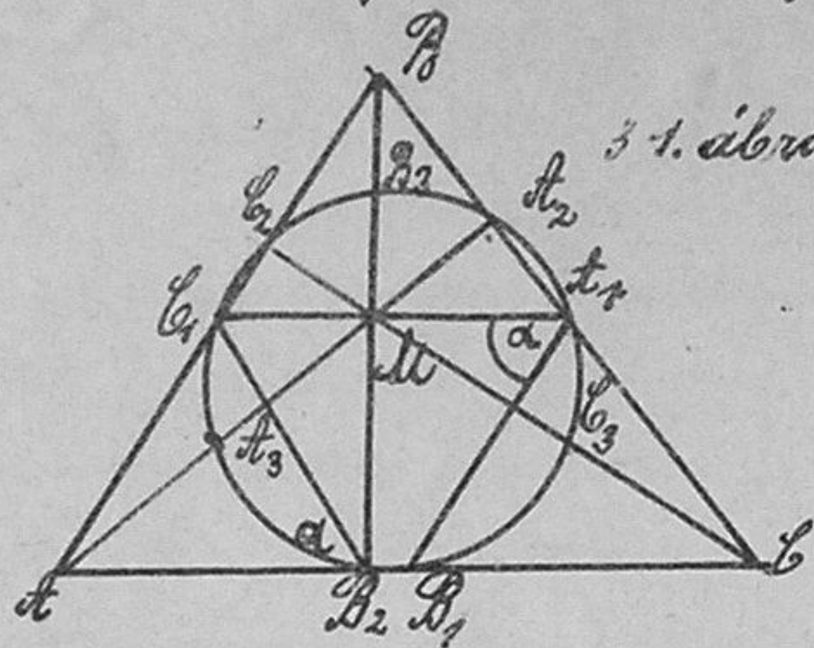
$SBC \triangle \sim SB_1C_1$ tehát $\frac{CS}{BC} = \frac{SC_1}{B_1C_1}$ vagy $\frac{CS}{SC_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$

De $ABC \triangle$ is $\sim A C_1 B_1 \triangle$-hez, tehát $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AB}{AC_1} = \frac{2}{1}$, tehát $\frac{CS}{SC_1} = \frac{2}{1}$

Ha most a BC oldal felezőpontját is összekötjük a szemben lévő csúccsal, akkor ez az egyenes is külön-külön a másik két szögfelezőt szintén $\frac{2}{1}$ arányban osztja, de ily osztási pont egy egyenesen csak egy lehet, tehát szükséges, hogy a B középegyenes egy pontban S-ben metsse egymást. Ezen S pontot azért hívjuk a háromszög súlypontjának, mert a háromszög csúcsaiban képzelt egyenlő tömegeket ezen pontban egyesítve a háromszög egyensúlyi helyzetén nem változtatunk.

A Feuerbach-féle kör.

A Feuerbach-féle kör az a kör, mely keresztül megy a háromszög oldalainak felező pontjain. Bebizonyítjuk, hogy az a kör egyszersmind keresztül megy a háromszög magasságvonalainak talppontjain is. Végül azt is, hogy az $A_1B_2B_3C_1$ négyszög egy húrnégyszög, mert az $AB_2\triangle$ körülírható körének középpontja C_1, tehát $BC_1 = C_1A = C_1B_2$, de ekkor $\sphericalangle B_2C_1A = \alpha$ és $\sphericalangle C_1B_2C = \pi - \alpha$ vagyis $\sphericalangle C_1A_1B_1 + \sphericalangle C_1B_3C = \alpha + \pi - \alpha = \pi$, ami épen azt mondja ki, hogy $A_1B_2B_3C_1$ négyszög tényleg húrnégyszög. Ha pedig az húrnégyszög, akkor nyilvánvalóan a körülírt körének egy közös sugara van. Bebizonyítható és minden talppontra nézve, tehát a Feuerbach-féle kör úgy is definiálható, hogy az a háromszög 3 magasságvonalának talppontján átmenő kör.



31. ábra.

A következőkben még három olyan pontot mutatunk ki, melyeken a Feuerbach-féle kör keresztül megy. Végig tekintetbe a 31. ábrán az ABM háromszöget. Ennek magasságtalppontjai szintén A_2, B_2, C_2. Tehát a Feuerbach-féle kör is ua. az, ami az ABC háromszögé. De a Feuerbach-féle kör az előbbiek szerint felezi a háromszög oldalait, tehát ez a kör az AM és BM oldalakat is felezi. Hasonló okból felezi még a CM vonaldarabot is. — Kaptunk tehát összesen 9 pontot a háromszögben, melyen a Feuerbach-féle kör keresztül megy (3 talppont, 3 oldalfelező pont és 3 magassági vonalakon levő pont). Ezen okból a Feuerb.-féle kört, különösen a franciák a kilenc pont körének is szokták nevezni.

Mivelhogy $A_1A_2A_3\triangle$ derékszögű, melynek átfogója A_1A_3, azért A_1A_3 Thales tétele szerint a Feuerb.-féle kör átmérője. Ugyszint a Feuerb.-féle kör középpontja (F) az (A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3) egyenesek közös metszőpontjába esik.

Kimutatjuk, hogy a körülírt kör középpontja (K), a magasságpont (M), a súlypont (S) és a Feuerb.-féle kör középpontja (F) egy egyenesen, az u. n. Euler-féle egyenesen vannak.

Ennek a kimutatása előtt azonban ismerkedjünk meg a hasonló és hasonlósági körök néhány tulajdonságával. Ha adva van egy O pontot ugyan keresztül és A_1 ponton át fektetett egyenesen az A_2 pontot úgy határozzuk meg, hogy $\frac{OA_2}{OA_1} = k$ viszony egy határozott számú legyen, ugyan ezen eljárást

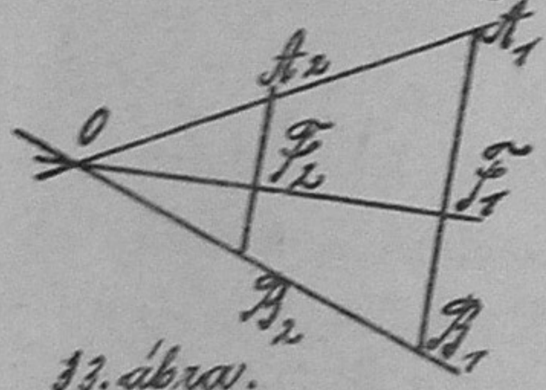
az $t_1 B_1$–polygon minden szögpontjára ismételjük, akkor azt mondjuk, hogy az $t_1 t_2 \ldots$ és $t_2 B_2$ idomok hasonló és hasonló fekvésűek. Megjegyzendő, hogy ha a vizsgálandó pontot, akkor O-tól t_1-ig kell az egyenesre t_2-őt felvinni, míg ellenkező esetben az ellenkező oldalra. Ha először esetben a hasonlóságot külsőnek, az utóbbiban belsőnek nevezzük, ha $t_1 t_2 \ldots$; $B_1 B_2 \ldots$ pontokat megfelelőnek (homológ) és az $t_1 B_1$, $t_2 B_2 \ldots$ egyeneseket homológ egyeneseknek mondjuk. Egyenes homológ, ha eg ymással párhuzamosak és ha az O-tól való normális távolságuk egy egyenesbe esik.



32. ábra

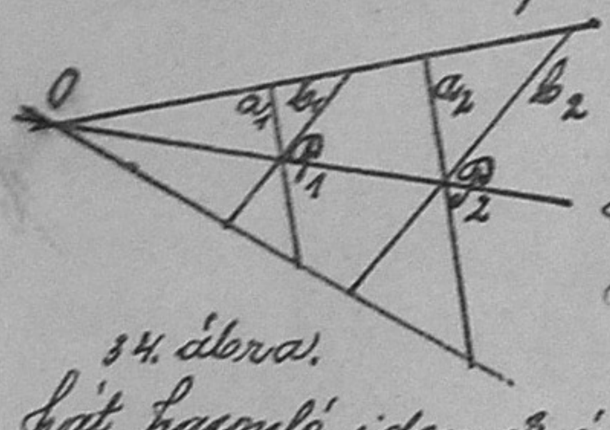
Ha $t_1 B_1$ és $t_2 B_2$ egyeneseket homológoknak, akkor az O ponton átmenő hasonlóan sugarak egymásnak homológ egyeneseket homológ pontpárokban metszik. (T_1, T_2 homológ pontok)

Két metsző egyenes metsző pontja és a homológ egyenesek összefolyópontja egymásnak homológ pontjai (O, P_2 homológ pontok)



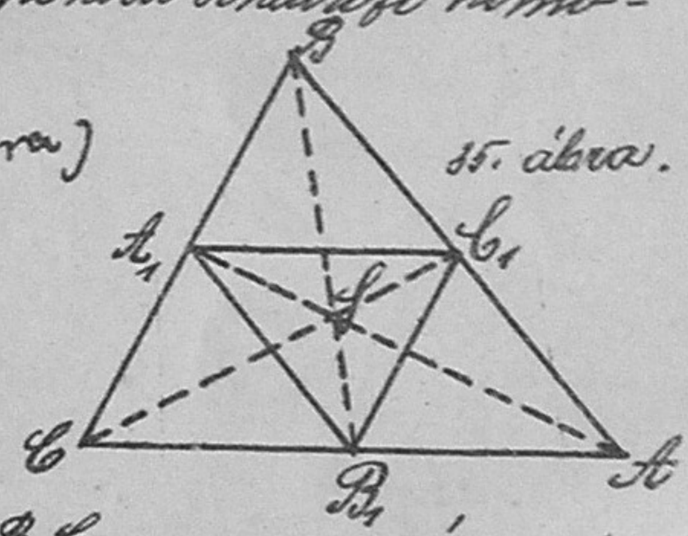
33. ábra.

Minden tételek a fellépő hasonló háromszögek tulajdonságaiból egyszerűen következnek. Az $t B C$ háromszög összekötése a súlypontra, mint fényképpontra vonatkozó homológ pontjai az oldalfelező $t_1 B_1 C_1$ pontok. (35 ábra)



34. ábra.

$t B C \triangle$ és $t_1 B_1 C_1 \triangle$ tehát hasonló idomok és S a hasonlósági pont. S szerint $\frac{St_2}{St} = \frac{SB_2}{SB} = \frac{SC_2}{SC} = \lambda = -\frac{1}{2}$



35. ábra.

A két háromszög magasság pontjai is homológ pontok, tehát az S ponttal az egyenesen vannak; az $t_1 B_1 C_1 \triangle$ magasság pontja pedig nem más, mint az $t B C \triangle$ körülírható körének középpontja (K). Be van tehát bizonyítva, hogy az $t B C$ háromszög magasságpontja (M) súlypontja (S) és a körülírható kör középpontja (K) egy egyenesbe esnek. Azonban az $t B C$ háromszög és $t_1 B_1 C_1 \triangle$ körülírható körének a középpontja is homológ; az $t_1 B_1 C_1 \triangle$ körülírható köre pedig az $t B C \triangle$ Feuerbach-féle köre, amiből azt is következtetjük, hogy K, F és S is egy egyenesbe esnek. Tehát tehát K, S, F, M egy egyenesen vannak, tegyük hogy milyen távolságban helyezkednek egymástól. Tudjuk hogy K és M, továbbá F és K is homológok, ezért

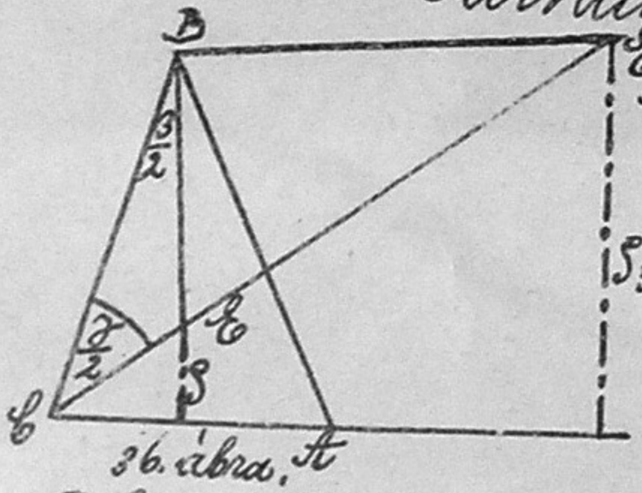
$\frac{\delta K}{\delta M} = -\frac{\delta F}{\operatorname{tg}\alpha\, \delta K} = -\frac{1}{2}$ vagyis $\delta M = -2\delta K$ és $\delta K = -2\delta F$, tehát az elosztás ilyen:

ha F pontnak S és M pontokhoz vonatkozó helyzetének meghatározását physikai meggondolással is elvégezhetjük. Tekintsük a, b és az α, β, γ pontokban egyegy súlytömeget súlyalmozva, ami annyi, mintha az $\alpha\beta\gamma$ $\triangle$ S súlypontjában 3 egységnyi tömeg M-ben pedig 1 egységnyi tömeg volna súlyalmozva, tehát hogy az SM egyenes egyensúlyban lehessen, azért ezen egyenes súlypontja S-hez háromszor oly közel fekszik, mint M-hez. Tehát ez a súlypont maga az F pont, mert A B egyenes súlypontja C_3 és C M súlypontja C_3 súlypontja pedig annak felezőjébe F-be esik, hol 4 egységnyi tömeget kell súlyalmozni.

A háromszög nevezetes pontjainak egymástól való távolsága.

Ha r a körülírható kör sugara, α, β, γ a háromszög három szöge, akkor mint ismeretes $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$, miből a 3 oldalra kiadódik, hogy $a = 2r\sin\alpha$, $b = 2r\sin\beta$, $c = 2r\sin\gamma$. Ismeretes hogy a Feuerbach-féle kör középpontja és a körülírható kör középpontja homológ pontpárok, azért a Feuerbach-féle kör sugara: $\frac{r}{2}$.

Lássuk a beírható körök sugarát:



$BCC_3 \sphericalangle = \pi - \frac{\beta+\gamma}{2} = \pi - \frac{\pi-\alpha}{2} = \frac{\pi-\alpha}{2}$

$\sin\frac{\pi-\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$ s így $\frac{CC_3}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ vagyis $CC_3 = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 2r\frac{\sin\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ de

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ tehát $CC_3 = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$

$S = CC_3\sin\frac{\gamma}{2}$ tehát

$S = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

$BC_3C \sphericalangle = \pi - \frac{\pi+\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$ vagyis $\frac{CC_3}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ és $CC_3 = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

vagyis:

$S_3 = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ hasonlóképen

$S_2 = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$S_1 = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

Számítsuk most ki a beírható körök középpontjainak távolát a körülírható kör középpontjától.

$CCK\,\triangle$-ből $\sphericalangle(ECCK\sphericalangle) = \frac{\gamma}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{\gamma+2\beta}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi+\beta+\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$

vagyis $\sphericalangle(ECCK\sphericalangle) = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ Carnot tétele szerint: (37. ábra.)

$E_3K^2 = r^2 + 6E^2 - 2r\,6E\cos\angle(K6E\ \text{ív}) = r^2 + 16r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} - 8r^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

de $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ tehát

$E_3K^2 = r^2 + 8r^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) = r^2 - 8r^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Mintegy pedig $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$ ezért

$$\underline{E_3K^2 = r^2 - 2r\varrho = r(r-2\varrho)}$$

Mivel E_3K^2 pozitív ezért $r - 2\varrho > 0$ vagyis $\underline{r \geq 2\varrho}$ E szerint a beliből érintő kör sugara (ϱ) nem lehet nagyobb, mint a Feuerbach-féle kör sugara (r). Hasonlóképen eljárhatók le E_3 távola K-tól

$K_3E_3^2 = KB^2 + BE_3^2 - 2KB \cdot BE_3\cos\angle(EBK\ \text{ív})$

$K_3E_3^2 = r^2 + 16r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 8r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

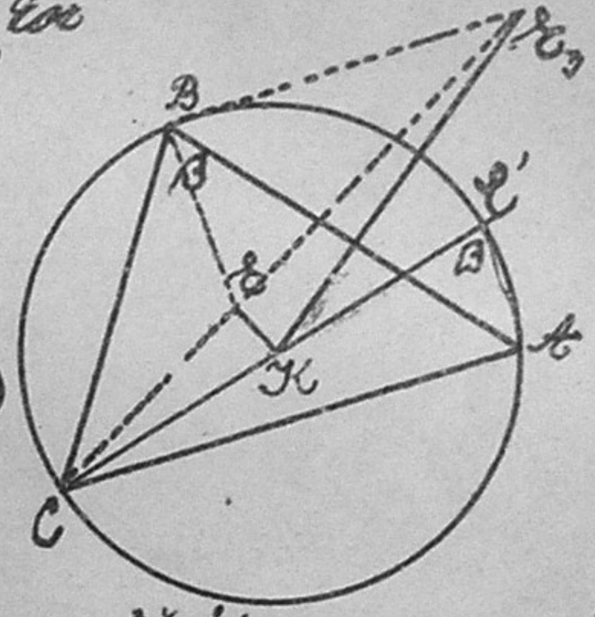
de $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$ s így

$K_3E_3^2 = r^2 + 8r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$= r^2 + 8r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$= r^2 + 8r^2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ vagyis

$$\underline{K_3E_2^2 = r^2 + 2r\varrho_3}$$



37. ábra

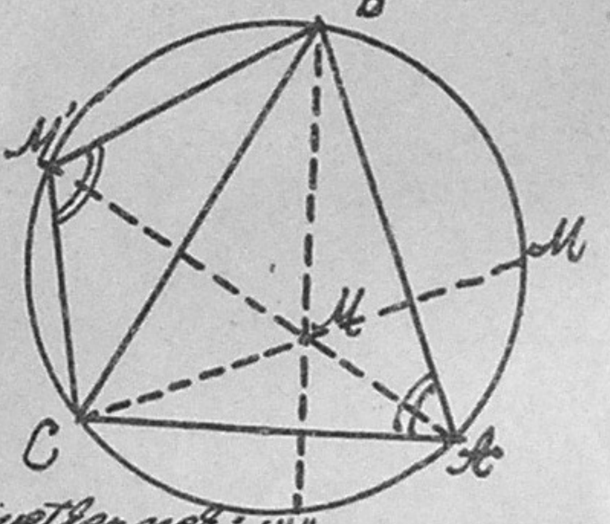
Hasonlóképen $K_2E_2^2 = r^2 + 2r\varrho_2$

$K_1E_1^2 = r^2 + 2r\varrho_1$

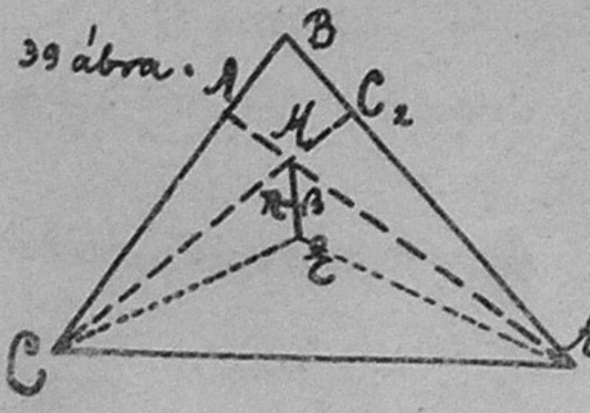
Mint mellékes tételt beigazoljuk, hogy a körülírható kör keresztül megy a magasságpontnak az oldalakra vonatkozó tükör-képein. Ui. is $BMC\sphericalangle = BM'C\sphericalangle = \pi - (\frac{\pi}{2} - \gamma) - (\frac{\pi}{2} - \beta) =$

$= \beta + \gamma = \pi - \alpha$ (38 ábra)

A kétszer vett szöget tehát egymás és a körülírható kör A ui. azon CB húrjához tartozó, emiatt fogva M' is a körön van. Jáson ur a belső érintő kör középpontjának (E) a magasság-pontról (M) való távolságát. M, E pontokat de is mert szerkesztési mód szerint megszerkesztjük, s nyert ábrából a kör. egyenletek igen egyszerűen következtetnek:



38 ábra.



39 ábra.

$EM^2 = EE^2 + ME^2 - 2EE \cdot ME\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\angle MEE = \angle BEE = BEE_2 = \frac{\gamma}{2} - (\frac{\gamma}{2} - \beta) = \frac{\gamma + 2\beta - \pi}{2} = \frac{\pi - \alpha + \beta - \pi}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$

$\frac{ME}{EA} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}$ tehát $\frac{ME}{\cos\gamma} = \frac{E}{\sin\beta} = 2r$

$ME = 2r\cos\gamma$, amint pedig látható:

$EE = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$, tehát

$\bar{EM}^2 = 16r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + 4r^2\cos^2\gamma - 16r^2\cos\gamma \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

$\bar{EM} = 16r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + 4r^2\cos^2\gamma - 16r^2\cos\gamma \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right) =$

$= 16r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} + 4r^2\cos^2\gamma - 16r^2\cos\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2} - 16r^2\cos\gamma\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

de $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$ tehát

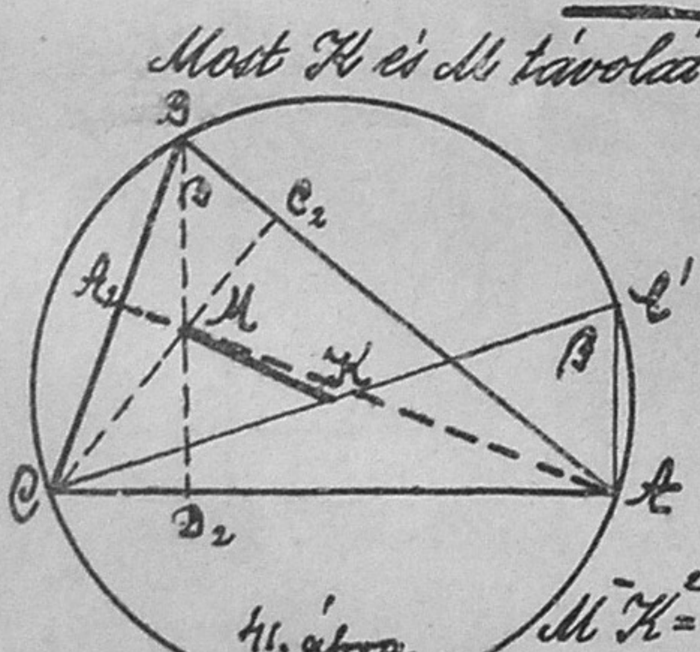
$= 16r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}(1-\cos\gamma) + 4r^2\cos\gamma(\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta)$

Innen ismeretes, miszerint: $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, mert $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ és $1-\cos\gamma = 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$, tehát

$= 32r^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ és mert amúgy:

$$\underline{\bar{EM}^2 = 2\varrho^2 - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.}$$

Lássuk az M távolát a körül írható körök középpontjaitól. $\measuredangle MCC_3 = \measuredangle MBC_1$ az pedig mint látható $= \frac{\beta-\alpha}{2}$, tehát



40 ábra

$\bar{MC}_3^2 = \bar{MC}^2 + \bar{CC}_3^2 - 2\,MC \cdot CC_3\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\bar{MC}_3^2 = 4r^2\cos^2\gamma + 16r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 16r^2\cos\gamma\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$

$\bar{MC}_3^2 = 4r^2\cos^2\gamma + 16r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 16r^2\cos\gamma\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$= 4r^2\cos^2\gamma + 16r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}(1-\cos\gamma) - 4r^2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

$1-\cos\gamma = 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$ és $\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ mert $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

$\bar{MC}_3^2 = 32r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + 4r^2\cos\gamma(\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta)$

$= 32r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + 4r^2\cos\gamma(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$$\underline{\bar{MC}_3^2 = 2\varrho^2 - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.}$$

$\bar{MC}_2^2 = 2\varrho_2^2 - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$\bar{MC}_1^2 = 2\varrho_1^2 - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

Most K és M távolát keressük.

41. ábra.

$\measuredangle MCK = \gamma - \measuredangle BCC_2 - \measuredangle KCt$

$\measuredangle BCC_2 = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\measuredangle KCt = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\measuredangle MtK = \beta - \alpha$

$\bar{MK}^2 = r^2 + 4r^2\cos^2\gamma - 4r^2\cos\gamma\cos(\beta-\alpha)$

$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta)$ tehát

$= r - 4r^2\cos\gamma\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$

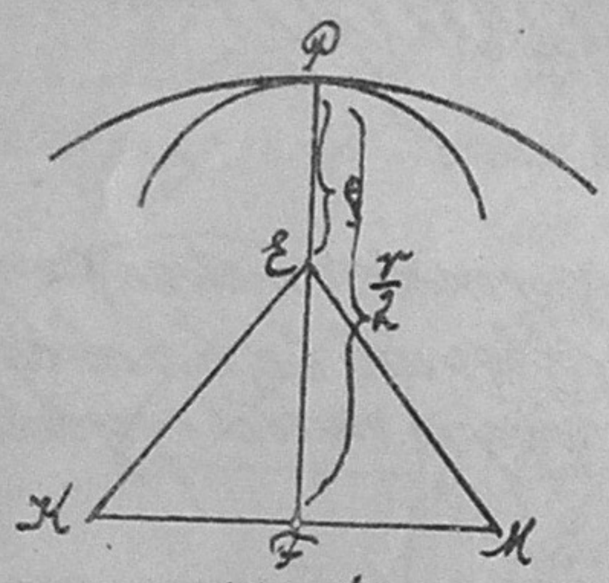
$\bar{MK}^2 = r^2 - 4r^2\cos\gamma(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$$\underline{\bar{MK}^2 = r^2 - 8r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Ebből az egyenletből igen érdekes relatio tűnik ki a háromszög szögeinek szinusaira. U.is! $\bar{MK}^2 \geq 0$ azért $r^2 \geq 8r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$\underline{\frac{1}{8} \geq \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

Kérdés: kell még F távolát $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, ... -től. Itt már nem is szükséges az eredeti háromszögre támaszkodni.



42. ábra.

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{E}\overline{K}^2 &= \mathcal{E}\overline{F}^2 + \left(\frac{KM}{2}\right)^2 - 2\,\mathcal{E}\overline{F}\,\frac{KM}{2}\cos\varphi \\ \mathcal{E}\overline{M}^2 &= \mathcal{E}\overline{F}^2 + \frac{KM^2}{4} + \mathcal{E}\overline{F}\cdot KM\cos\varphi\end{aligned}\right\} \text{ezt így} +$$

$$\mathcal{E}\overline{F}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}K^2 + \frac{1}{2}\mathcal{E}M^2 - \frac{1}{4}KM^2.$$

a jobb oldal minden tagja ismeretes, tehát

$$\mathcal{E}\overline{F}^2 = \left(\frac{r^2 - 2\rho r}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(2\rho^2 - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right) - \frac{1}{4}\left(r^2 - 8r\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)$$

$$= \frac{r^2}{2} - r\rho + \rho^2 - 2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \frac{r^2}{4} + 2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$= \frac{r^2}{4} - r\rho + \rho^2 = \left(\frac{r}{2} - \rho\right)^2$$

$$\frac{\mathcal{E}\overline{F} + \frac{r}{2} - \rho}{\rho}$$

Innen $\frac{r}{2}$ a Feuerbach-kör, ρ a belül írt kör sugara. Ennek egy geometriai jelentése az, hogy a Feuerbach-kör kívülről érinti a háromszögbe írt kört, de úgy, hogy ez annak belülről érinti. Ami másrészt azt tépi, hogy van egy közös pontjuk: P. – Ha a Feuerbach-kör centrumának a kívül érintő körök középpontjaitól való távolságát akarjuk meghatározni, ugyanazt az ábrát használhatjuk, csak $\mathcal{E}$ helyett $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$-t kell tenni.

$$\mathcal{E}_3\overline{F}^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_3K^2 + \frac{1}{2}\mathcal{E}_3M^2 - \frac{1}{4}KM^2$$

$$\mathcal{E}_3\overline{F}^2 = \frac{1}{2}\left(r^2 + 2r\rho_3\right) + \frac{1}{2}\left(2\rho_3^2 - 4r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right) + \frac{1}{4}\left(r^2 - 8r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)$$

$$= \frac{r^2}{2} + r\rho_3 + \rho_3^2 - 2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \frac{r^2}{4} + 2r^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

$$= \frac{r^2}{4} + r\rho_3 + \rho_3^2 = \left(\frac{r}{2} + \rho_3\right)^2 \text{ és így}$$

$\mathcal{E}_3\overline{F} = \frac{r}{2} + \rho_3$, hasonlóképpen $\mathcal{E}_2\overline{F} = \frac{r}{2} + \rho_2$; $\mathcal{E}_1\overline{F} = \frac{r}{2} + \rho_1$, aminek geometriai jelentése az, hogy a Feuerbach-kör a háromszög kívül érintő körével kívülről érintkezik.

Innen a magasság-pont felvevése által szóba jött három háromszögnek is ez a Feuerbach-köre, azért az itt szóba jött „érintő" körökkel azonban is így viselkedik. – Ekképen 16 „érintő" körrel van közös pontja és pedig 4-gyel „belső", 12-vel „külső" érintkezésben. Ha még felvesszük a oldó-szöget 9 pontot, a Feuerbach-féle körön 25 nevezetes pontunk van. —

A gömb trigonometriája.

Két egyenes helyzete a térben. Lehet egymást metsző, egymással párhuzamos, vagy kitérő. Az utóbbi eset akkor áll be, ha az egyik egyenesen át nem lehet oly síkot fektetni, hogy a másik egyenesnek a síkban egynél több pontja feküdjék.

Két térbeli egyenes szögét, ha a két egyenes metsző, vagy egymással párhuzamos, akként értjük meg, mint a síkban fekvő két egyenes szögét. Ha a két egyenes kitérő, akkor az egyik egyenes egy pontján át a másikkal párhuzamos egyenest húzunk s a két metsző egyenes szöge méri a két kitérő egyenes szögét. Az így meghatározandó mindig úgy, hogy $0 \leqq \alpha \leqq \pi$.

Egy egyenesnek egy síkhoz való helyzete a következő lehet: 1.) az egyenes a síkban feküdhetik (ha 2 pontja a síkkal közös) 2.) az egyenes a síkot metszheti; 3.) lehet oly párhuzamos, mely az előbbi és az első esetben az egyenesnek síkegymással 0, vagy π szöget zár be.

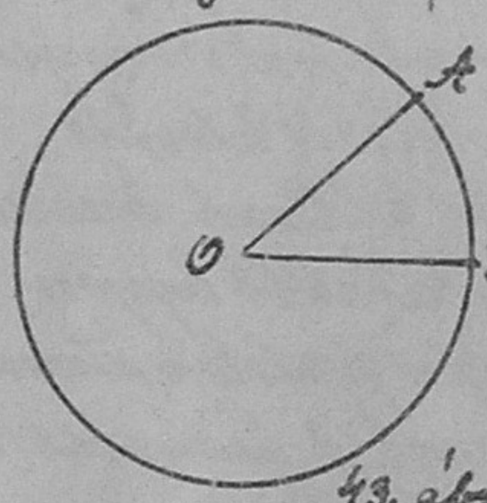
Ha az egyenes a síkot metszi, akkor az egyenes a síkkal szöget képez. Az elemi geometriából ismeretes, hogy ha az egyenes talppontján áthaladó két egyenessel a metsző egyenes derékszöget képez, akkor az egyenes az egész síkkal, tehát minden benne fekvő egyenessel derékszöget képez. Az ilyen merőleges egyenest a sík normálisának nevezik.

Ha az egyenes hajlik a síkhoz, akkor rajtuk az elemi geometria egyik tétele szerint az egyenes a talppontjára illesztett, a síkban fekvő egyenesek közül a merőlegesjával alkotja a legkisebb szöget. Ezt a szöget nevezzük ily esetben az egyenes és sík hajlásszögének.

Két sík helyzete egymáshoz lehet párhuzamos, vagy metsző. Utóbbi esetben a két sík hajlásszöge alatt azon szöget értjük, melyet a síkok két egyenes egymással alkot. Ez a szög egyenlő annak mellékszögével), melyet egy tetszőleges pontból a két sík közös metszőjére merőlegesen húzott két egyenes egymással bezárnak be egymással.

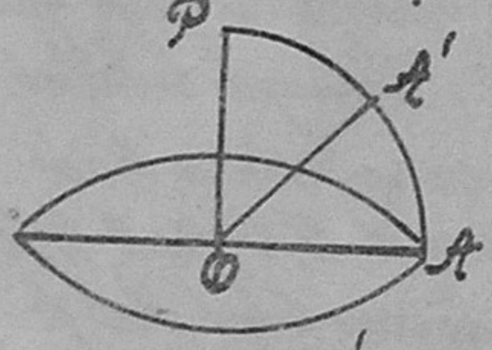
Szögek mérése az egységsugarú gömbön.

A szögek összehasonlítása a térben az egységsugarú gömbön történik. Minden az O-ból kiinduló iránynak a gömb felületén egy pont felel meg. Két irány hajlásszögét pl. OA és OB-ét úgy kapjuk, hogy az O, A, B pontokon át sík felületet, amely a gömböt főkör szerint metszi. Ezen főkörnek az A, B pontok közé eső kisebbik ívhossza méri OA és OB irány hajlásszögét. —



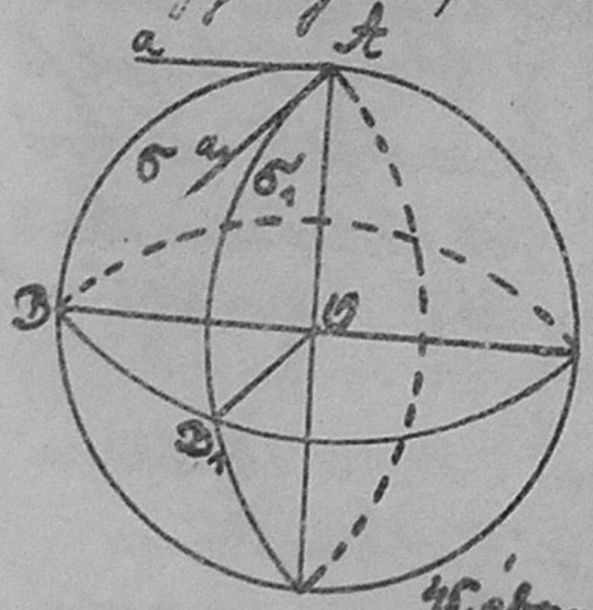
43. ábra.

Minden térbeli sík irányát a gömbön egy-egy főkör méri. Ha a főkör középpontjában merőleget emelünk, akkor ez a merőleges a gömböt két pontban metszi, melyeket az illető főkör pólusainak mondunk. A gömb középpontjára átmenő sík és egyenes hajlásszögét azon kisebbik ívhossz méri (44. ábra), mely a sík pólusából (P) és az egyenes irány pontjából (A') átmenő főkörön a síktól az egyenes irány pontjáig terjed. (A A')



44. ábra.

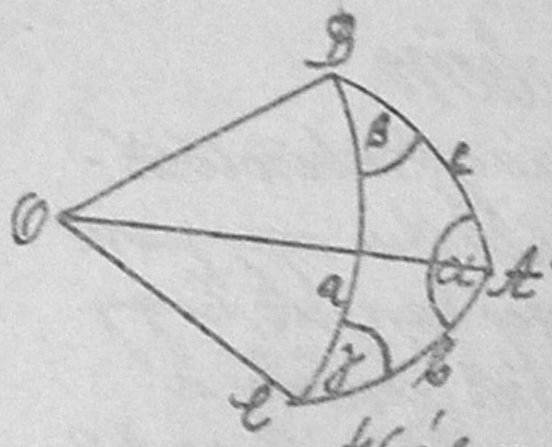
Két sík hajlásszögét úgy nyerjük, hogy a gömb középpontjából a metsző egyenesre merőleges sugarat állítunk s ezen merőlegesen át síkot fektetünk. Az így nyert főkörnek a két merőleges közé eső kisebbik íve (B B') méri a két sík hajlásszögét. U. ezt a szöget adja a két sík (a, a') metszési egyenesének a gömbön felvett pontjában (A) a két sík 2 főkörhöz húzott két érintő hajlásszöge, illetőleg a két sík főkörei által az A pontban képezett gömbi szög is.



45. ábra

A gömbháromszög.

Ha a gömbön felvesszük három pontot (A, B, C), melyek nincsenek egy síkban a gömb közepén keresztül három legnagyobb kört feltehetünk, akkor a körök AB, BC, CA ívei gömbháromszöget alkotnak. Ezen g. háromszög 6 alkotó része: három oldala (a, b, c) és három szöge (α, β, γ). Ha az A, B és C pontokat összekötjük a gömb kö-

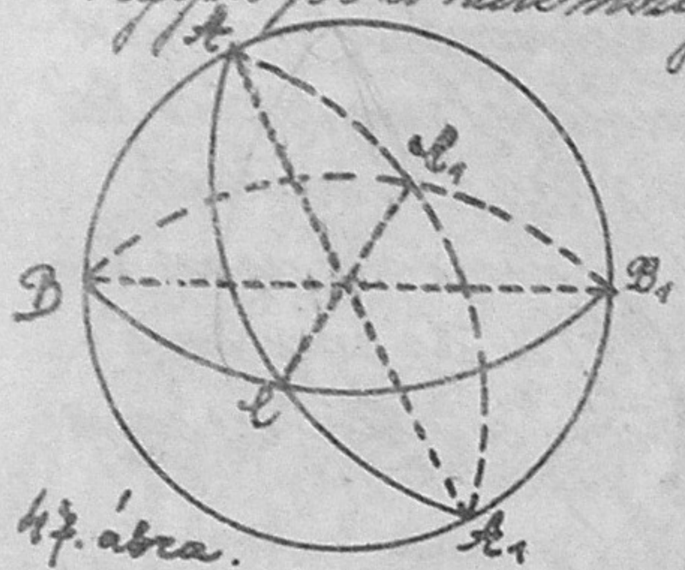


46. ábra.

fél gömbháromszög és a megfelelő háromél gömbi szögei ismeretes.

Vizsgálódásaink folyamán a háromszög tulajdonságait magán a gömbön fogjuk tanulmányozni, de egyes esetekben, ha elképzelnünk nehézkes, a megfelelő síkháromélre is hivatkozunk.

Három pont megfúrásával úgyszólván 2 ghárom szög keletkezik. Ezekkel fogunk most megismerkedni. Hogy az ábrán áttekinthetőbb legyen, vegyük fel a háromszög A, B pontjait úgy, hogy az egyik pontból átmenő



47. ábra.

fölér éppen a papíros alsó élébe essék, a harmadik (C) pont pedig legyen a papíros fölött.

Ha az AB é. ghárom szög azon pontjainak diametrális pontjait vesszük tekintetbe, akkor egy új $A_1 B_1 C_1$ ghárom szöget nyerünk, melyet az első ghárom szög átellenesének nevezünk. Könnyű belátni, hogy ezen ghárom szög alkotóelemei pontról a, b, c és α, β, γ, ha az eredeti gh. mérőlapjait alkotják. Dolgozva, hogy az A, B, C, és $A_1 B_1 C_1$ ghárom szögek alkotó síkjai megegyeznek egymással még nem lehet őket fedésbe hozni, mert ha a nyíl irányában eltolva az $A_1 B_1$ oldalt fedésbe hoppuk az AB oldallal, akkor a C_1 oldal még mindig a papíros síkja alatt marad míg C az előtt van. Ha pedig eltolással A_1 az B-vel és B_1-et A-val hoppuk fedésbe, akkor ugyan C_1 is a papíros síkja fölé kerül, de az A és B-nél levő szögekre merőlegesen a B_1 és A_1-nél lecsúszó ívek, ezek pedig nem fedik egymást. Ha α = β, akkor a fél szög fedi egymást, vagyis C_1 összeesik C-vel, akkor azonban szükségképen a $\overline{AB} = C$.

Vegyük tekintetbe most a BCA, ghárom szöget (47. ábr.). Ennek alkotósíkjai, amint könnyen belátható: a, π-b, π-c és α, π-β, π-γ. Hasonlóképen az $A_1 B_1 C_1$ alkotósíkjai: π-α, b, π-c és π-α, β, π-γ. Az ABC, ghárom szög pedig: a, π-b, c, és π-α, π-β, γ. Ezen ghárom szöget az eredeti gh. mellékghárom szögének nevezik.

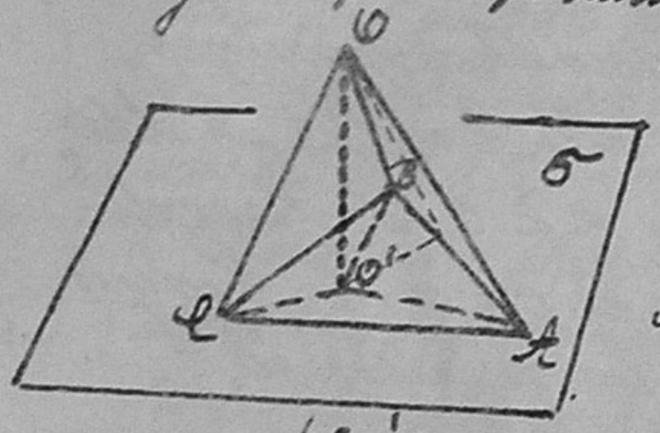
A „még fellépő" $A_1 B_1 C_1$ gh. az $A_1 BC$ gh.-nek átellenese. Tehát alkotósíkjai szintén a, π-b, π-c és α, π-β, π-γ. Hasonlóképen az $A_1 B C$ gh. az AB, C gh. átellenese, tehát mérőlapjai: π-a, b, π-c és π-α, β, π-γ. Az $A_1 B_1 C$ gh. pedig az

t_1BC gh. ítellence, tehát mérőtei: $\pi-a, \pi-b, c$ és $\pi-\alpha, \pi-\beta, \gamma$. Összefoglalóan a gh. mérőtei: ABC gh. mérőtei: a, b, c; α, β, γ.

t, BC	" "	$a, \pi-b, \pi-c$; $\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$.
tB_1C	" "	$\pi-a, b, \pi-c$; $\pi-\alpha, \beta, \pi-\gamma$.
ABC_1	" "	$\pi-a, \pi-b, c$; $\pi-\alpha, \pi-\beta, \gamma$
AB_1C_1	" "	$a, \pi-b, \pi-c$; $\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$.
A_1BC_1	" "	$\pi-a, b, \pi-c$; $\pi-\alpha, \beta, \pi-\gamma$.
A_1B_1C	" "	$\pi-a, \pi-b, c$; $\pi-\alpha, \pi-\beta, \gamma$.
$A_1B_1C_1$	" "	a, b, c; α, β, γ.

A gh.-szög szögei és oldalaira vonatkozó tételek.

Az tBC gh. három csúcspontjain feltesszük egy-egy síkot a vegyük tekintetbe a gh.-höz tartozó háromélet. Bocsássunk az O pontból (a háromél csúcsából merőleget a síkra. Legyen a merőleges talppontja O'. Mivel hogy $OO_1t \triangle \cong OO_1B \triangle \cong OO_1C \triangle$ azért $O_1t = O_1B = O_1C$ vagyis az O' pont az $tBC \triangle$ körülírható körének középpontja.



48. ábra

Általában, ha két egyenlőszárú háromszögnek közös az alapjuk, de nagyságuk különböző, akkor azon a háromszögben nagyobb a csúcsnál lévő szög, amely háromszögnek a magassága kisebb. Ezt a tételt felhasználjuk:

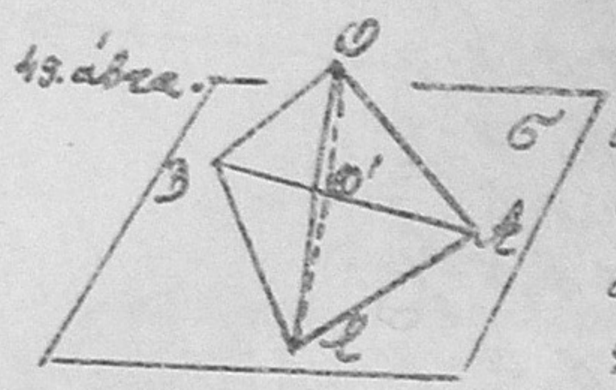
Az $tO_1B \triangle$ és $tOB \triangle$ egyenlőszárúak és közös alapjuk. Mivel hogy az előbbi háromszög magassága azon derékszögű háromszög egyik befogója, melynek átfogója a második háromszög magassága, ezért az O_1-nél lévő $\sphericalangle$ szög nagyobb, mint az O-nál lévő $\sphericalangle$ szög. Ez utóbbi pedig a gh. egyik oldala. Ha $c < c_1$ } akkor egyértelmű $a+b+c < a_1+b_1+c_1$ de
hasonlóképen $a < a_1$ } $a_1+b_1+c_1 < 2\pi$ vagyis
és $b < b_1$ } $a+b+c < 2\pi$.

Szavakban: a gh. oldalainak összege kisebb, mint 2π.

Ezt a tételt azonban még az előbbi bizonyítással általánosnak nem mondhatjuk, mert itt feltettük, hogy az O' az $ABC \triangle$ belsejében van, vagyis, hogy az ABC gh. hegyesszögű. Az O' pont azonban esetleg még az $ABC \triangle$ területén kívül is, vagy pedig a

szögnyíló" legyen, még a két esetre is be kell azt bizonyítanunk.

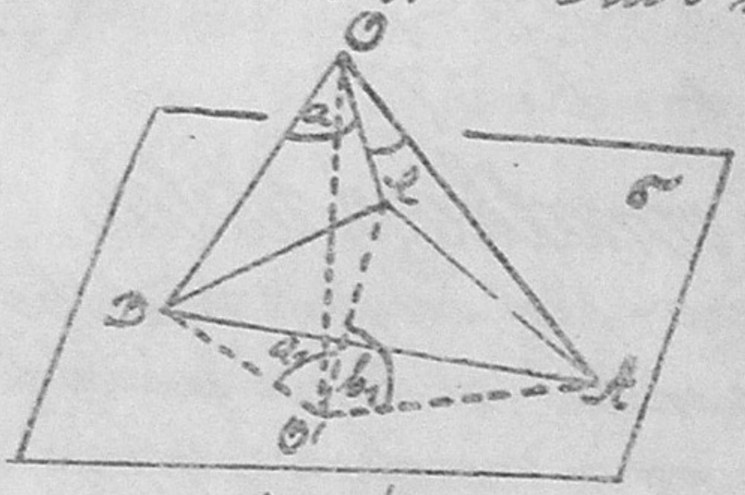
Ha O' a síkháromszög egyik oldalára esik, akkor a háromszögnek derékszögűnek kell lennie, minthogy O'a körülírható kör átmérője. Ekkor az AO' és AO háromszögeknél $b < b_1$; a BCO és BCO' háromszögeknél $a < a_1$, vagyis $a+b < a_1+b_1$. Ha $a_1+b_1 = \pi$ a így $a+b < \pi$.



43. ábra.

$a+b+c < 2\pi$. — De $c < \pi$ pl. minden oldala kisebb π-nél tehát

Ha O' az ABC síkháromszögön kívül esik, akkor is



50. ábra.

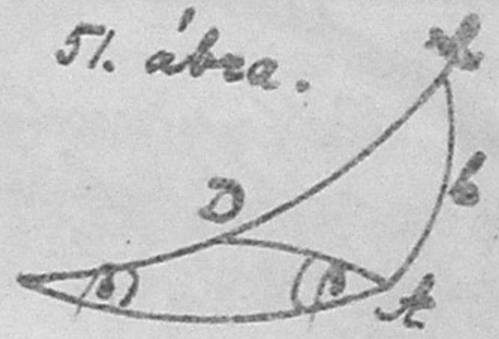
ACO' és ACO Δ-nél $b < b_1$

BCO' és BCO Δ-nél $a < a_1$

s így $a+b < a_1+b_1$

de $a_1+b_1 < \pi$ és $c < \pi$ azért tehetjük $a+b+c < 2\pi$. A tétel tehát általános érvényű. A most levezetett tétel minden gömbháromszögre, tehát a mellék gh-re is áll. A mellék gh. oldalai a, $\pi-b$, $\pi-c$ tehát $a+\pi-b+\pi-c < 2\pi$, vagyis $a < b+c$. Hasonlóképen a másik két gh.-ból nyerjük, hogy $b < a+c$ és $c < a+b$. Vagyis a gh.-nél is két oldal összege minden nagyobb a harmadiknál.

Ezen tétel segélyével kimutathatjuk, hogy ha a gh-nél két szög nem egyenlő, akkor az oldalai sem egyenlők, a nagyobb szöggel nagyobb oldal fekszik szemben. Legyen $\alpha > \beta$ s nevezzük az α szöghöz a b szöget, akkor az így nyert ADB gh.-ban $BD = AD$; az ABC gh.-ben pedig az előbbi tétel szerint $CD+DA > b$ vagy minthogy $CD+DA = CD+DB = CB = a$, azért $a > b$; ami bizonyítandó volt.



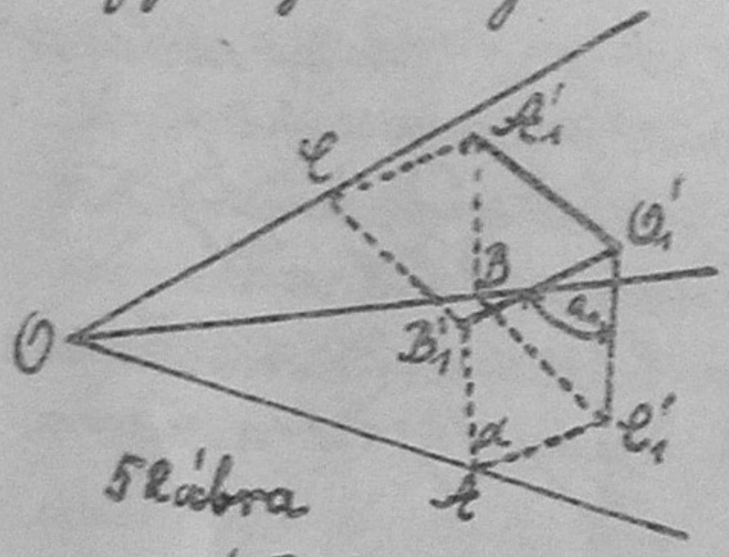
51. ábra.

A tétel megfordítva is áll; t. i. nagyobb oldallal nagyobb szög fekszik szemben, mert ha $a > b$ és feltesszük, hogy $\alpha = \beta$, akkor ellentmondásra jutunk. U. is. az előbbiek szerint ha $\alpha = \beta$, akkor $a = b$ volna. Tehát kell, hogy $\alpha > \beta$ legyen.

II. eset tételei a mellék gh-re is állanak. Tegyük azt a mellék gh.-t, melyben az oldalak a, $\pi-b$, $\pi-c$; a szögek α, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$. Ha most $a = \pi-b$, akkor $\alpha = \pi-\beta$. Ha két relatio minden oldalához b-t, a másodiknál minden oldalához β-t adva s minden relationál 2-vel osztva nyerjük, hogy

ha $\frac{\alpha+\beta}{2} \gtrless \frac{\pi}{2}$ akkor $\frac{\delta+\varepsilon}{2} \gtrless \frac{\pi}{2}$ amit úgy fejezünk ki, hogy két d. szögnek középarányosa a szomszédos felező szögei szögtanilag közeli "jellegű".

Ha $\triangle ABC$ gh.-gel egyenlő" oszlopos ez első" gh.-et már láttuk, de van még egy, melynek megismerése is igen fontos a gúlaszögtani műveletekből.



5. ábra

Tegyük fel a kérdést: $O(ABC)$; ha ennek oldaléleiből O_1 pontból merőlegeseket bocsátunk, az így keletkezett $O_1(A_1B_1C_1)$ háromél élei az előbbi háromél oldallapjaira merőlegesek.

$O_1A_1 \perp BOC$
$O_1B_1 \perp AOC$
$O_1B_1 \perp AOB$

} De ebből mindjárt következik, hogy $O(ABC)$ élei is merőlegesek $O_1(A_1B_1C_1)$ lapjaira,

mert BOA és BOC metszővonala: BO s minthogy a két lapra O_1B_1 és O_1A_1 merőlegesek, azért az ezen átfektetett O_1AB síkra annak metszővonala OB merőleges, így $OB \perp A_1O_1B_1$; $OA \perp B_1O_1C_1$; $OC \perp C_1O_1A_1$.

Ha most $O_1(A_1B_1C_1)$ oldalainak metszését megkeressük $O(ABC)$ élein, a két gh. közti hajlást az összefüggést igen könnyen megtaláljuk. Jegyezzük fel, hogy ahol $O_1B_1C_1$ metszi OA-t, jelöljük A_1-gyel, az így nyert négyszög $O_1B_1A_1C_1$ két szöge $B_1 = C_1 = \frac{\pi}{2}$, minthogy a négyszög átlója merőleges OA-ra, tehát az itt nyert szög $= \alpha_1$; az ABC háromélnek COA és AOB által kapott élszöge, de akkor az O_1-nél levő szög $B_1O_1C_1$, vagyis az új gh. oldala $\underline{a_1 = \pi - \alpha}$, ha a két gh. alkotó síkjai:

BOC $\quad$ aEc $\quad$ $\alpha\beta\gamma$; $O_1A_1B_1C_1$ $\quad$ $a_1b_1c_1$ $\quad$ $\alpha_1\beta_1\gamma_1$.

Amint a-t megkaptuk, úgy nyerjük $(O_1A_1B_1B_1)$ és $(O_1A_1C_1C_1)$ négyszögekből a másik két oldalt: $b_1 = \pi - \beta$; $c_1 = \pi - \gamma$.

Ha pedig $(OA_1B_1C_1)$; $(OB_1A_1C_1)$ és $(OA_1C_1B_1)$ négyszögeket vesszük, azt találjuk:

$a = \pi - \alpha_1$; $b = \pi - \beta_1$; $c = \pi - \gamma_1$. Ezen adatokból világos, hogy egyikük oldalai a másik szögeinek mellékszögei és megfordítva.

Húzzuk most a két háromél közös csúcspontjára, akár is az élek a megfelelő" oldalakra kölcsönösen merőlegesek maradnak, amikor is az élek a megfelelő" harmadik éllel ellentétes" oldalra irányulnak. Ha most az O pontból egy egységnyi sugarú gömböt, akkor a gömbön a két háromélnek megfelelő" alakú két gh.-et nyerünk, melyeknél az első" gh. csúcsai a második

gh. főélpárnak pólusai és fordítva a második gh. csúcsai az első gh. oldalaira szélesített főkörök pólusai.

Ezen két gh. közül az egyiket a másik poláris gh.-ének nevezik. A poláris gh. bevezetésével a gh. szögeire is kapunk egy relációt. A gh oldalaira nézve, mint tudjuk áll, hogy $a+b+c < 2\pi$.

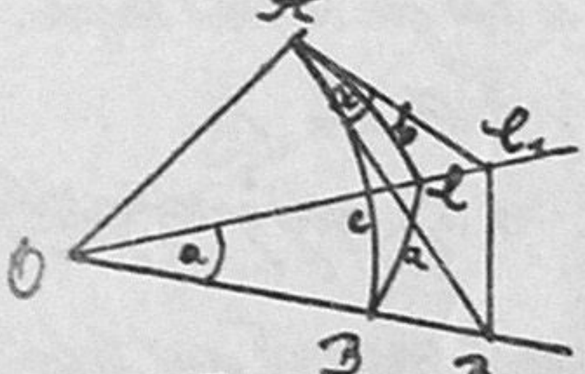
A gh. poláris gh.-ének oldalai $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$, De az előbbi tétel a poláris gh. oldalaira is áll, tehát $\pi-\alpha+\pi-\beta+\pi-\gamma < 2\pi$; mindkét oldalhoz -3π-t adva kapjuk $-\alpha-\beta-\gamma < -\pi$ vagy $\alpha+\beta+\gamma > \pi$ szavakban: a gh. szögeinek összege mindig nagyobb π-nél.

A gh. oldalaira áll még a tétel, mely szerint $a < b+c$. Alkalmazva ezt a poláris gh.-nél: $\pi-\alpha < \pi-\beta+\pi-\gamma$ vagy $\beta+\gamma < \pi+\alpha$ hasonlóképpen $\gamma+\alpha < \pi+\beta$ és $\alpha+\beta < \pi+\gamma$

Gömbháromszögtani alapegyenletek.

A gháromszögnek 6 alkotószöge van; ha ezek közül háromat ismerünk, akkor egy negyedikét mindig ki tudunk számítani. A következőkben relációkat fogunk felállítani 4-ből alkotószög között. Minthogy $\binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15$ azért összesen 15 ilyen relációhoz fogunk jutni. Ezek közül a háromszögtan alapegyenletei:

A három első relatió levezetésénél segítségül fogjuk venni a gh.-hoz tartozó háromélű. Húzzuk az A C és A B ívekhez az A pontban érintő egyenest. Ezek metszéspontját az O C, illetőleg O B egyenesen jelöljük C_1, illetőleg B_1-gyel. Az OAB_1 $\triangle$-ből $AB_1 = tg\, c$ és $OB_1 = sec\, c$ (természetesen feltéve, hogy a gh. az egységsugarú gömbön van.) Hasonlóképpen az OAC_1 $\triangle$-ből $AC_1 = tg\, b$ és $OC_1 = sec\, b$.



53. ábra.

Ezeket tekintetbe véve fejezzük most ki a Carnot tétel segítségével az OB_1C_1 és AB_1C_1 háromszögekből a közös B_1C_1 oldalt,

$$\overline{B_1C_1}^2 = \overline{AC_1}^2 + \overline{AB_1}^2 - 2\,\overline{AC_1}.\overline{AB_1}\cos\alpha$$

$$\overline{B_1C_1}^2 = \overline{OC_1}^2 + \overline{OB_1}^2 - 2\,\overline{OC_1}.\overline{OB_1}\cos a \qquad \text{vagyis}$$

$$\overline{AC_1}^2 - \overline{AB_1}^2 - 2\,\overline{AC_1}.\overline{AB_1}\cos\alpha = \overline{OC_1}^2 + \overline{OB_1}^2 - 2\,\overline{OC_1}.\overline{OB_1}\cos a$$

A megfelelő értékeket behelyettesítve és felhasználva, hogy

$sec^2 b - tg^2 b = 1$, $sec^2 c - tg^2 c = 1$ és az egyenletet osszuk rendre

lesz.

$0 = 1 + 1 + 2 \log b \operatorname{tg} c \cos\alpha - 2 \sec b \sec c \cos a$

Ha egyenlet 2-vel osztva s $\cos b \cos c$-vel kerekítésparaxa lesz

I $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$. Hasonlóképen adódik, hogy

II. $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta$

III $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$

Ez az úgynevezett **oldalakra vonatkozó cosinus tétel.**

II. Határozzuk fölöttük, hogy a b_1 és B_1 metszéspont létezik, vagyis hogy a gh.-nek a és b oldalai $\frac{\pi}{2}$-nél kisebbek. Kimutatjuk, hogy a tétel ettől a föltevéstől függetlenül, vagyis általános érvényű

1.) Legyen $b > \frac{\pi}{2}$, $c > \frac{\pi}{2}$. Illetőleg most a BCB_1 mellék gh.-ee, melynek élei: $\alpha, \pi-b, \pi-c$, és $\alpha, \pi-\beta, \pi-\gamma$. Ennek vizsgálatával áll a tétel:

$$\cos a = \cos(\pi-b)\cos(\pi-c) + \sin(\pi-b)\sin(\pi-c)\cos\alpha$$

vagy $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$

Tehát áll a tétel, ha mind a két oldal negyedörnél nagyobb.

2.) Legyen $b > \frac{\pi}{2}$ és $c < \frac{\pi}{2}$, akkor lejönnek az AB_1C mellék gh.-ee; ennek élei: $\pi-a, \pi-b, c$, és $\pi-\alpha, \pi-\beta, \gamma$. Az I tétel itt is áll, mert $\pi-b < \frac{\pi}{2}$, tehát:

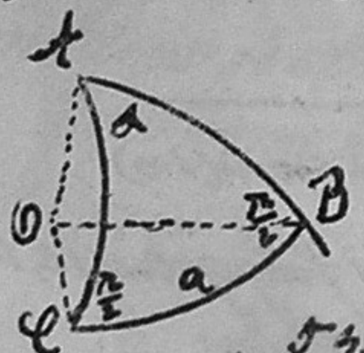
$$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi-b)\cos c + \sin(\pi-b)\sin c \cos(\pi-\alpha)$$

vagy $-\cos a = -\cos b \cos c - \sin b \sin c \cos\alpha$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha$$

tehát a tétel ebben az esetben is érvényes.

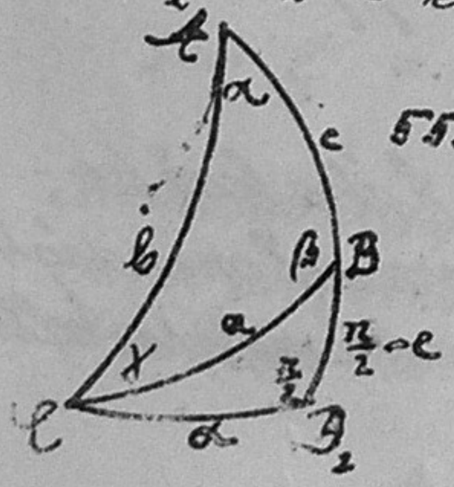
3.) Ha $b = c = \frac{\pi}{2}$ akkor a tétel szerint $\cos a = \cos\alpha$. Ám de ekkor a BC oldal éppen az O pontban mint súlyhoz tartozó fölöttük fekszik (54. ábra) a egyenlet azt mondja, hogy a



54. ábra

$\cos a = \cos\alpha$ egyenlet akkor is helyes.

4.) Ha végre $b = \frac{\pi}{2}$ és $c < \frac{\pi}{2}$, akkor a oldalt megegyezik $\frac{\pi}{2}$-re. Az így nyert bBB_1 gh.-nél a $BB_2 = \frac{\pi}{2} - c$ és $bB_2 = \alpha$. Könnyű belátni, hogy a bBB_2 gh.-re áll a cos. tétel, tehát: $\cos a = \cos\alpha \cos(\frac{\pi}{2}-c) + \sin\alpha \sin(\frac{\pi}{2}-c)\cos\frac{\pi}{2}$



55. ábra.

vagyis $\cos a = \cos\alpha \sin c$

De ugyanezt a helyes vélt alakú egyenletet kapjuk akkor is, ha a cosinus tételt az AB_1C gh.-re alkalmazzuk.

Belátjuk tehát, hogy a cosinus tétel

lános érvényű".

Ha ezen tételeket a poláros-ra alkalmazzuk, melynek méretei: $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ és $\pi-a$, $\pi-b$, $\pi-c$, akkor az ú.n. szögekre vonatkozó cosinus tételt kapjuk.

$$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a)$$ vagyis

IV. $\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$. Hasonlóképpen nyerjük még, hogy

V. $\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b$

VI. $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$

Az eddigi hat képletből számolás segítségével nyerjük a többi tételeket.

I.-ből $$\cos a = \frac{\cos\alpha - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$ miből

$$1+\cos\alpha = \frac{\cos a - (\cos b\cos c - \sin b\sin c)}{\sin b\sin c} = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b\sin c}$$

Ha itt $a+b+c = 2s$ jelölést, akkor egyik trigonometriai képlet szerint (22. old. 7a.):

$$1+\cos\alpha = \frac{2\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}$$ és mivel $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

azért $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s.\sin(s-a)}{\sin b.\sin c}}$$ (A négyzetgyökért +jellel véve) Hasonló alakú

másnál: $$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos b\cos c + \sin b\sin c - \cos a}{\sin b\sin c}$$

$$= \frac{\cos(b-c)-\cos a}{\sin b\sin c} = \frac{2\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}$$ Vagyis

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

$2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a = \frac{2}{\sin b\sin c}\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$ Ezek szerint

vagy $\sin a$-val mindkét oldalt osztva:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{2}{\sin a.\sin b.\sin c}\sqrt{\sin s.\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

Látjuk, hogy a jobboldali kifejezés a, b és c-nek szimmetrikus függvénye, tehát ú.n. szerint $\frac{\sin\alpha}{\sin a}$ és $\frac{\sin\beta}{\sin b}$ és $\frac{\sin\gamma}{\sin c}$-re nézve is, úgy hogy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$$, mely három alakjegyenlet (VII., VIII., IX.)

az ú.n. sinus tétel adják.

A 15 alapegyenlet közül már 9-et számoltunk, a hátra levő 6 egyenlet mind egy tizparabolához tartozik, amennyiben ezek közül mindég 4 szomszédos alkotóhoz közötti áll fenn az relatio. Ilyen szomszédos alkotó-

neiyek pl: a, γ, b, α. Hogy ezek közt relatiót harmadmagukban létre, kiindulunk a cosinus tételből":

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

de $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$ és $\frac{\sin c}{\sin \gamma} = \frac{\sin a}{\sin \alpha}$

a két utóbbi egyenletből $\cos c$ és $\sin c$ az első" egyenletbe helyettesítve:

$$\cos a = \cos b(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma) + \sin b \frac{\sin a}{\sin \alpha} \sin \gamma \cos \alpha$$

Rendezve: $\cos a(1-\cos^2 b) = \sin a \sin b \cos b \cos \gamma + \sin a \sin b \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha$

Tekintetbe véve, hogy $1-\cos^2 b = \sin^2 b$ és $\sin a \sin b$ -vel osztva kész:

$$\operatorname{cotg} a \sin b = \cos b \cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha \quad \text{vagy}$$

X. $\cos b \cos \gamma = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin \gamma \operatorname{cotg} \alpha$ Hasonlóképen

XI. $\cos c \cos \beta = \sin c \operatorname{cotg} a - \sin \beta \operatorname{cotg} \alpha$

XII. $\cos c \cos \alpha = \sin c \operatorname{cotg} b - \sin \alpha \operatorname{cotg} \beta$

XIII. $\cos a \cos \gamma = \sin a \operatorname{cotg} b - \sin \gamma \operatorname{cotg} \beta$

XIV. $\cos b \cos \alpha = \sin b \operatorname{cotg} c - \sin \alpha \operatorname{cotg} \gamma$

XV. $\cos a \cos \beta = \sin a \operatorname{cotg} c - \sin \beta \operatorname{cotg} \gamma$

Ezek a gh.-tani cotangens tételek.

Gauss féle formulák.

A most levezetett alapformulák közül ugyan csak a sinus tételek alkalmasak a logaritmusos számításra. Ún. Gauss-féle formulák ugyan nem alapegyenletek, mert nem 4 alkotórészből összetett állapotának meg összefüggéseit, de igen célszerűen használhatók a praxisban, mert logaritmusra is alkalmazhatók.

Ezen formulák levezetésénél egyszerűség lesz a már ismert kör. képletekre:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \quad ; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}} \quad ; \quad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}$$

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}} \quad ; \quad \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

Mindenhol a négyzetgyökei + jellel vesszük" s a gyökei alatti sinusok is mind positivok, mert az összes itt szereplő ívek mérőszáma egyenesen π-nél kisebbek. Ezen formulákat példaszámra:

$$\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \mp \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$
$$= \frac{\sin s}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2} \mp \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$\frac{\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin s \mp \sin(s-c)}{\sin c}$$

Felhasználva, hogy $\sin s - \sin(s-c) = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{c}{2}$ (22 old. 7a., egyenlet)
és hogy $\sin c = 2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{c}{2}$ lesz

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$ I. Gauss féle formula.

Hasonlóképen pigyelembe véve, hogy
$\sin s + \sin(s-c) = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{c}{2}$ és $\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$ II. Gauss féle formula.

Mainé ket Gauss féle formulát úgy kapunk.

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \pm \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$
$$= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2} \pm \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}$$

miből $\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin(s-b)\pm\sin(s-a)}{\sin c}$. Tekintetbe véve, hogy

$\sin(s-b)+\sin(s-a) = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}$ és $\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$, lesz:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$ III. Gauss féle formula.

Tekintetbe véve, hogy
$\sin(s-b)-\sin(s-a) = 2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a-b}{2}$ és $\sin c = 2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$
lesz: $\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$ IV. Gauss féle formula

Hasonló 4-4 formula áll meg. β,γ; bc és $\alpha\gamma$; a,c között is

Neper féle analogiák.

2-2 Gauss féle formula osztásából az u. n. Neper féle analogiák adódnak. Így a IV. formula osztva I. vel:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$ I.

II: osztva I.-el: $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$ II.

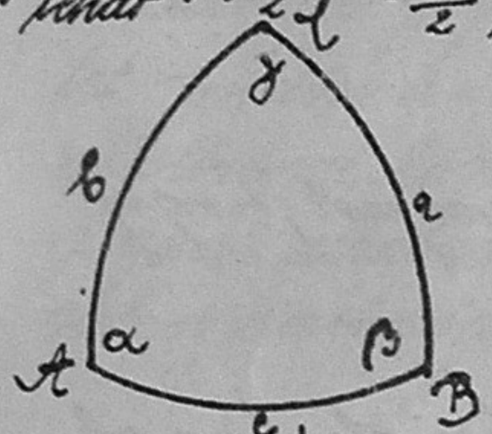
V. osztva II-mal: $\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ III.

végül:
I osztva I-gyel: $\frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ IV.

Gömbháromszögek megoldása.

Megismertük a gh.-tan legfontosabb formuláit, tehát most már a gh.-ek megoldásához foghatunk.

A legegyszerűbb gh. az, melyben fél szög derékszög: $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ Tudjuk, hogy $\frac{\alpha+\beta}{2}$ és $\frac{a+b}{2}$ egymással egyenlő jellegű. Ilyen esetben tehát $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}$, de $a = b$, mert $\alpha = \beta$ Tehát szimmetriás. Ekkor azonban C csúcs az AB él körének pólusa, tehát $c = \gamma$



56. ábra.

Amint látjuk, ebben az esetben egyik alapformulára sincs szükségünk, mert minden alkotóelészt már egyszerre ismerünk. Ha még $c = \gamma = \frac{\pi}{2}$, akkor a gh. oly háromélhez tartozik, melynek minden éle a másik fél élre merőleges. Az ily háromélt derékszögűnek mondunk.

Ha a gh.-ben csak egy szög derékszög pl. $\gamma = \frac{\pi}{2}$ akkor a többi öt alkotórész között összesen $\binom{5}{3} = 10$ alapformula áll fönn, melyeket a 15 ismert alapformulából nyerünk, ha mindenhol $\frac{\pi}{2}$-et írunk be.

Mindhogy minden tekintetbe kell vennünk, hogy a gh. derékszögű ezeit egyes alapformuláit hogyan adhatjuk tekintjük figyelembe, melyekben a γ szög előfordul.

A cos. tétel szerint $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma$ de

$\cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ tehát

I. $\cos c = \cos a \cos b$

A szögekre vonatkozó cosinus tétel szerint:

$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a$

Itt $\cos\gamma = 0$ és $\sin\gamma = 1$, tehát

II. $\cos\alpha = \sin\beta\cos a$ Hasonlóképen nyerjük még, hogy

III. $\cos\beta = \sin\alpha\cos b$

Minthogy továbbá $\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$ és $\cos\gamma = 0$, azért

IV. $\cos c = \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta$

A sinus tétel szerint: $\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$ tehát most

V. $\sin a = \sin c \sin\alpha$

VI. $\sin b = \sin c \sin\beta$

A többi négy egyenletet a cotg tételből nyerjük, ha a sorrendet 4-4 alkotóelemét úgy változtatjuk, hogy γ is középső legyen; tehát a jobb. részek közt kell a cotg. tételt felállítani: 1.) α, b, γ, 2.) α, b, γ, a 3.) b, γ, α, β, 4.) γ, a, β, c,

A cotg. tétel: $\cos\alpha \cos b = \sin b \operatorname{cotg} c - \sin\alpha \operatorname{cotg}\gamma$. Itt

$\operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} = 0$ tehát:

VII. $\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$ Hasonlóképpen

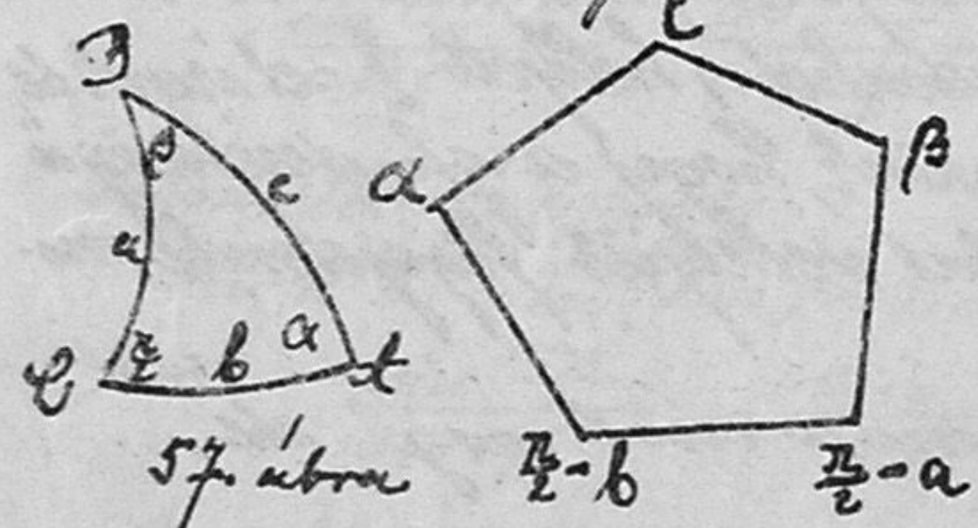
VIII. $\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$

A I. és III. alapformuláiból pedig ha $\gamma = \frac{\pi}{2}$ nyerjük, hogy

II. $\operatorname{cotg}\alpha = \sin b \operatorname{cotg} a$ és

V. $\operatorname{cotg}\beta = \sin a \operatorname{cotg} b$

Képezzük ezen formuláink felét szabályba vonta, össze. Szerinte, ha a gh. 5 alkatrészét a „megfelelő" sorrendben egy ötszög öt csúcspontjában írjuk, azzal a megszorítással, hogy a fél átfogóhoz (a derékszögű mellett levő oldalak) helyett a $\frac{\pi}{2}$-ne kiegészítését vesszük, akkor áll a köv. fél szabály:



57. ábra

1.) Általános háromszögnél levő négy csúcsnál levő négy oldalelem egyenlő a mellette fekvő négy oldalelem csúcspontjainak sorrendjével.

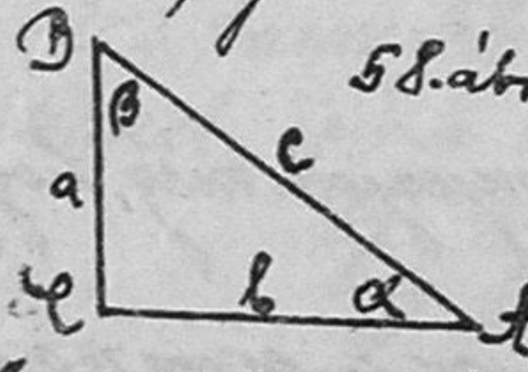
2.) Általános háromszögnél levő négy csúcsnál levő négy szögelem egyenlő a szemben fekvő négy oldalelem szögeinek szorzatával.

A képen egy formuláját szabályba vonta össze. Szerinte, ha a gh. 5 alkatrészét a „megfelelő" sorrendben egy ötszög öt csúcspontjában írjuk, azzal a megszorítással, hogy a fél átfogóhoz (a derékszögű mellett levő oldalak) helyett a $\frac{\pi}{2}$-ne kiegészítését vesszük, akkor áll a köv. fél szabály:

1.) Általános háromszögnél levő négy csúcsnál levő négy oldalelem egyenlő a mellette fekvő négy oldalelem csúcspontjainak sorrendjével.

2.) Általános háromszögnél levő négy csúcsnál levő négy szögelem egyenlő a szemben fekvő négy oldalelem szögeinek szorzatával.

A képen felír 10 formula bizonyos analógiát mutat a derékszögű háromszögre vonatkozó relációkkal.



58. ábra.

A síkháromszögnél:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

A gömbháromszögnél:

$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$

$\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}$ stb.

A most levezetett 10 formulából igen érdekes relációkat kapunk a gh. részére vonatkozólag.

Ugyanis a $\cos\alpha = \cos a \sin\beta$ egyenletben tudjuk, hogy $\beta < \pi$ vagy $\sin\beta$ mindég pozitiv, vagyis $\cos\alpha$ és $\cos a$ egyenlő jelű kell legyen, ami azt mondja ki, hogy a és α vagy egyszerre hegyes, vagy egyszerre tompa "derékszögű" gh.-ek jellegű. Tehát a "különböző" és a "szöghöz tartozó" szög egyenlő

A $\cos c = \cos a \cos b$ egyenlet mindkét oldalát szorozzuk meg $\cos c$-vel akkor: $\cos^2 c = \cos a . \cos b . \cos c$ Itt a baloldal mindég pozitiv – tehát a jobboldalnak is pozitivnak kell lennie, ami csak úgy lehet, ha a, b, c közül vagy mind a három kisebb $\frac{\pi}{2}$-nél, vagy egy szerre 2 nagyobb $\frac{\pi}{2}$-nél.

Most két fogunk tenni a gh.-ek megoldására kizárván azon esetet midőn $a = b = \frac{\pi}{2}$, mert ekkor $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ vagy semmiféle relatiót az alkotóelemek között nem állíthatunk föl. A megoldásokra oly formulákat fogunk alkalmazni, melyek logarithmus számitásra alkalmasak, ilyenek a derékszögű gh. megoldására a Neper féle formulák is.

A derékszögű gháromszög feladatai.

Az öt rész: (a, b, α, β) a következők lehetnek adva

$$\left.\begin{matrix} ab; & b\alpha; & c\alpha; \\ a\beta, & c\beta \end{matrix}\right\} \text{I.} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha\beta; & ac; \\ & bc \end{matrix}\right\} \text{II.} \qquad \left.\begin{matrix} a\alpha; \\ b\beta \end{matrix}\right\} \text{III.}$$

Az I. csoportnál, hol 2-2 homogéneus részek vannak adva, az oldalak teljesen, szétszéls-értékek; a II. és III. csoportnál nem homogéneus részek vannak adva s az I. csoporthoz tartozó adatoknál kiromposfeltételek mellett egyértékű megoldást kapunk, míg a III. csoportnál a megoldás két értékű lesz, mert a sin függvénnyel határozzuk meg az illető alkotóelemet.

Vegyük az esetek sorra

1.) Adva van két befoglaló: a, b; a megfejtések:

$$\left.\begin{aligned} \cos c &= \cos a \cos b \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b} \\ \operatorname{tg}\beta &= \frac{\operatorname{tg} b}{\sin a} \end{aligned}\right\}$$

Ezek a megoldások egyértékűek, mert $\cos a$ és $\sin b$ valódi törtek, tehát $\cos a . \cos b$ is pozitiv, vagy negativ valódi tört lesz; a tg pedig bármely tört által egyértékűleg van meghatározva 0 és π között.

2.) Adva van a és β; megfejtések:

$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} a}{\cos \beta}$
$\operatorname{tg} b = \sin a \operatorname{tg} \beta$
$\cos \alpha = \cos a \sin \beta$

} Az előbbi okoknál fogva ezek is egy értékű megoldások.

3, III. Adva a, α; megoldások:

$\operatorname{cotg} \beta = \cos c \operatorname{tg} \alpha$
$\sin a = \sin \alpha \sin c$
$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cos \alpha$

} Itt is cotg. b és tg b kétségkívül egyértékű megoldások, de sin a is az, mert éppen az imént mutattuk ki, hogy a derékszögű gh.-nél a és α egynemű jellegűek.

4, Adva: α, β, γ; a megoldás a köv. relatió teljesülését tételezi fel:

Mivelhogy $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ és itt $\gamma = \frac{\pi}{2}$ azért

$\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$; s mivelhogy $\alpha + \beta < \gamma + \pi$, azért

$\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ tehát $\frac{3\pi}{2} > \alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$. Továbbá mivelhogy

$\alpha + \gamma < \beta + \pi$ vagyis itt $\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ és mivelhogy

$\beta + \gamma < \alpha + \pi$ itt $\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$, azért még az $|\alpha + \beta| < \frac{\pi}{2}$

feltétel is teljesedésbe kell menjen. Ezen feltételekkel a megoldás egyértékű.

$\cos c = \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta$
$\cos a = \frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$
$\cos b = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$

} Ha a feltételek teljesülnek, akkor a fenti oldalon mind valódi törtek lesznek, tehát $\cos c, \cos a, \cos \beta$ egyértékűen lesznek meghatározva.

Hogy cotg α cotg β igazi tört, azt a köv. képen mutathatjuk ki: Az első feltétel szerint $\alpha + \beta$ a második, vagy harmadik negyedrészben fekszik, tehát $\cos(\alpha + \beta) < 0$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta < 0$ vagy

$\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta - 1 < 0$ miből $\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta < 1$.

A második feltétel szerint $\cos(\alpha - \beta) > 0$;

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta > 0$

$\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta + 1 > 0$ vagy $\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta > -1$,

tehát $+1 > \operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta > -1$ ami éppen azt mondja ki, hogy cotg α cotg β igazi tört.

Kimutatjuk, hogy $\frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$ és $\frac{\cos \alpha}{\sin \beta}$ igazi törtek.

Itt több esetet kell megkülönböztetnünk:

1. eset α és β hegyes szögek: $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$

Az egyik feltétel szerint $\alpha + \beta > \frac{\pi}{2}$, vagyis $\alpha > \frac{\pi}{2} - \beta$. De nagyobb szögnek nagyobb a sinusa is, tehát $\sin \alpha > \cos \beta$, tehát

$1 > \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$

Nagyobb szögnek kisebb a cosinusa tehát:

$\cos\alpha < \sin\beta$ vagyis $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} < 1$

Ebben az 1, esetben tehát így $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ mint $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$ valódi tört.

2, eset $\alpha > \frac{\pi}{2}$ $\beta < \frac{\pi}{2}$

Egyik föltétel szerint $\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ vagyis $\alpha < \frac{\pi}{2} + \beta$. Másikét szög a második quadránsban van, tehát nagyobb szögnek nagyobb cosinus, de kisebb sinus felel meg:

$\cos\alpha < \cos(\frac{\pi}{2}+\beta)$ és $\sin\alpha > \sin(\frac{\pi}{2}+\beta)$

$\cos\alpha < -\sin\beta$ és $\sin\alpha > \cos\beta$, miből

$\frac{|\cos\alpha|}{\sin\beta} < 1$ és $\frac{|\cos\beta|}{\sin\alpha} < 1$ ami megint azt mond-

ja, hogy $\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ és $\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}$ ebben az esetben is valódi törtek.

3, Végül, ha $\alpha > \frac{\pi}{2}$ $\beta > \frac{\pi}{2}$ akkor is valódi törteket kapunk, mert

$\alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$ vagy $\alpha < \frac{3\pi}{2} - \beta$

Itt is mindkét szög a második quadránsban fekszik, tehát:

$\sin\alpha > -\cos\beta$ és $|\cos\alpha| < \sin\beta$ miből

$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha} < 1$ és $\frac{|\cos\alpha|}{\sin\beta} < 1$

Ezen feladatnál tehát, ha a $\frac{3\pi}{2} > \alpha+\beta > \frac{\pi}{2}$ és $|\alpha-\beta| < \frac{\pi}{2}$ feltételek teljesülnek akkor mindég egyértékű megoldást nyerünk.

5, ábra: a c Ebben az esetben is a két adatnak bizonyos feltételeket kell kielégíteniök. U.is, ha $a < \frac{\pi}{2}$, akkor $a < \frac{\pi}{2} = ?$ de akkor $\underline{a < c}$, mert derékszögű gh.-nél a szögek és a megfelelő oldalak jellege egyező. Másrészről ekkor $\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$ de ekkor $\frac{\alpha+c}{2} < \frac{1}{2}$ miből $c < \pi - a$; azaz a kívánt föltétel $\underline{a < c < \pi - a}$ lesz.

Összefoglalva: Ezen föladatnál a föltétel az, hogy az adott átfogó (c) az a és π-a szög között feküdjék

A megoldásokat ekkor a köv. egyenletek szolgáltatják:

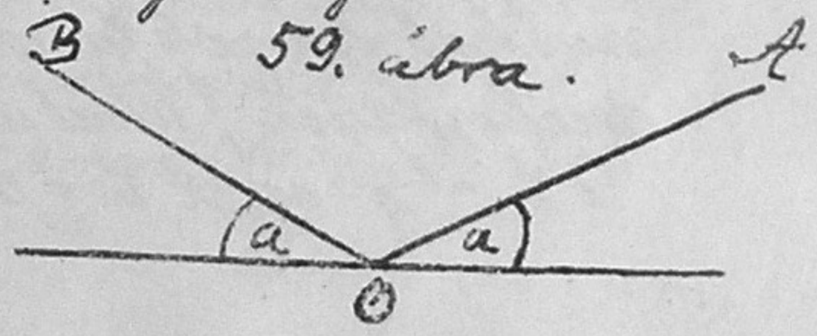
$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$

$\sin\alpha = \frac{\sin a}{\sin c}$

$\cos\beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$

} A föltétel szerint a C szög második szára az $\angle OB$ szögbe kell esnie, emiatt fogyan

59. ábra.



$\sin c > \sin a$, vagyis $\frac{\sin a}{\sin c} < 1$, tehát van a valódi törtet ker. tehát van megoldás e az egyenlőtlenségnek, mert a egyenlő"jellegű lett legyen a-val. Hasonlóképpen $\cos b < \cos a$, vagyis $\frac{\cos b}{\cos a} < 1$, és $\operatorname{tg} a < \operatorname{tg} c$ vagyis $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c} < 1$, tehát b és β-ra nézve is egyenlőtlenségre megoldásra.

b) Ekkor a, a_1 a megoldások:

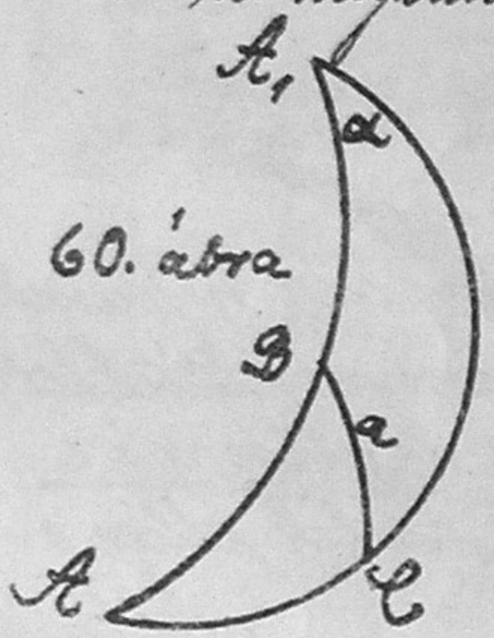
$$\left.\begin{aligned} \sin c &= \frac{\sin a}{\sin \alpha} \\ \sin b &= \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} \alpha} \\ \sin \beta &= \frac{\cos a}{\cos \alpha} \end{aligned}\right\}$$

Ennél a feladatnál több esetet kell megkülönböztetnünk:

1.) Legyen $\alpha < \frac{\pi}{2}$, természetesen ekkor $\alpha < \frac{\pi}{2}$. mert a és a egyenlő"jellegűek. Ebben az esetben van megoldás, ha $a < b < \frac{\pi}{2}$

2.) Legyen $\alpha > \frac{\pi}{2}$ és így $a > \frac{\pi}{2}$, ekkor a fenn tört abban kor valódi, ha $a > a > \frac{\pi}{2}$. A két esetet összefoglalva: ezen feladatnak akkor van megoldása, ha az adott α szög α és $\frac{\pi}{2}$ közé esik. Nézzük hogy ekkor hány megoldás lesz: c-nek nyilvánvalóan két megoldása lesz, mert ekkor $c = \sin(\pi - c)$; b és β-nak azonban csak 1-1 megoldása lesz, mert ha ismeretes a és c, akkor már ismeretes a harmadik oldal jellege is és ezzel együtt ezen oldallal szemben levő" β szög jellege is.

A két megoldás geometriailag is evidenciába helyezhető. Ha b. és a mellékelt ábrán A és A_1 diametrális pontok, akkor a megoldásnak $A\,B\,C$ és $A_1\,B\,C$ gh.-ek egyaránt megfelelnek.



60. ábra

Derékszögű" gömbi háromszög megoldására visszavezethető feladatok.

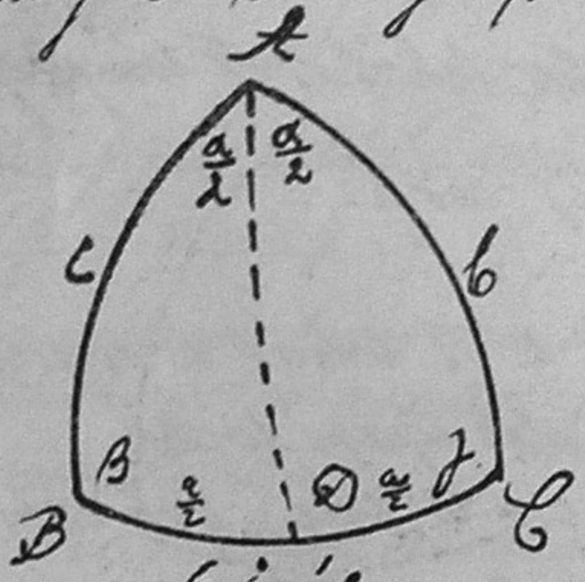
Ilyen feladat három van.

I. Legyen a gh. egyik oldala $c = \frac{\pi}{2}$. Térjünk most át a polár gh.-re, melynek a három szöge $\pi - c = \frac{\pi}{2}$, tehát a polár gh. ebben az esetben derékszögű, így azt az előbbiek szerint megtudjuk oldani.

I. Legyen a gh. egyenlőszárú, azaz $b = c$. Ha meghúzzuk az A csúcsból a szöggfelezőt, akkor a nyert $A\,D\,C$ gh. és $A\,D\,B$ gh. derékszögűek, tehát az előbbiek szerint megoldhatók: (61. ábr.):

$D\,C = \frac{a}{2}$ és $A\,C = b = c$ oldalak tovább az A-nál levő szög,

mely $\frac{\alpha}{2}$ és a β-nál fogó, vagyis az összes alkotóéppel.



6. ábra.

III. Ha a gh. olyan, hogy $\frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2}$, akkor $a = \pi - b$. Térjünk át az első mellé gömbháromszögre, itt az oldalak a, $\pi-b$, $\pi-c$, de az előbbiek szerint, ha $a = \pi - b$, akkor a gh. egyenlőszárú s ást már meg tudjuk oldani.

Általános gh.ek megoldása.

Általánosnak nevezzük a gh.et, haban eddig tárgyalt esetek egyike sem lép fel.

A feladat itt abban áll, hogy három alkotóéppel ismeretében a többit kell kiszámítani. A lehető esetek (összesen 6.):

Adva $a\,b\,c$; α,β,γ; $a\,b\,\gamma$; α,β,c; $a\,b\,\alpha$; α,β,a.

Elég volna ezek közül csupán három feladatot tárgyalni nevezetesen kd adva van a,b,c; $a\,b\,\gamma$; $a\,b\,\alpha$; mert a másik három feladat a poláris gh. segélyével ezekre vezethető vissza. Célszerűség szempontjából azonban mind a hatot külön fogjuk tárgyalni.

I. Adva: a, b, c. Természetesen az adatokat kielégítsék a szükséges általános feltételek:

$0 < a+b+c < 2\pi$; $a < b+c$; $b < c+a$ és $c < a+b$.

Megoldások: a cosinus tétel alkalmazásával

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$ Hasonlóképpen

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c}$$ és

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}$$

Kimutatjuk, hogy ezek a megoldások létezének, vagyis, hogy az itt szereplő "törtek igazi törtek. Ennek érdekében kimutatjuk, hogy a tört alsó és tört felső összege és különbsége is pozitív.

$$A+F = \cos a - (\cos b \cos c - \sin b \sin c) = \cos a - \cos(b+c)$$
$$= 2 \sin \frac{a+b+c}{2} \sin \frac{-a+b+c}{2}$$

Mindhogy a feltételek szerint $0 < \frac{a+b+c}{2} < \pi$ és $b+c > a$ így $-\frac{a+b+c}{2} < 0$ amely ellentmondás szerint szimmetrikus szerepük, tehát $A+F$ tényleg pozitív.

$$A - F = \sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c = \cos(b-c) - \cos a$$
$$= 2 \sin \frac{a-b+c}{2} \sin \frac{a-b-c}{2}$$

Itt az előbbi okból $\frac{a-b+c}{2} < \pi$ és $\frac{a+b-c}{2} < \pi$ tehát a második szorzótényező, vagyis $A-F$ is pozitív, vagyis az $\frac{A}{F}$ tört is pozitív.

A tovább hasonlóan következik $a+b+c = 2\sigma$; $a-b+c = 2(\sigma-c)$; $a+b-c = 2(\sigma-b)$; $-a+b+c = 2(\sigma-a)$ továbbá $\alpha+\beta+\gamma = 2\sigma$; $\alpha+\beta-\gamma = 2(\sigma-\gamma)$; $\alpha-\beta+\gamma = 2(\sigma-\beta)$; $-\alpha+\beta+\gamma = 2(\sigma-\alpha)$.

A második egyenlőtlenség bizonyításánál szükségünk lesz a következő összefüggésekre, melyek a fenti összefüggésekből könnyen adódnak:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-b)\sin(\sigma-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma \sin(\sigma-a)}{\sin b \sin c}}$$

a többi trigonometriai mérőszám hasonlóképpen, tehát

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-b)\sin(\sigma-c)}{\sin\sigma \sin(\sigma-a)}} \quad \text{Hasonlóképpen} \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-a)\sin(\sigma-c)}{\sin\sigma \sin(\sigma-b)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-a)\sin(\sigma-b)}{\sin\sigma \sin(\sigma-c)}}$$

Most megmutatjuk, hogy a mondottakból következik, hogy α, β, γ a Δ belső szögei.

I. Tétel: α, β, γ - ra az előzőekben adott értelmezés mellett teljesülnek a következők:

$$3\pi > \alpha+\beta+\gamma > \pi; \quad \beta+\gamma < \pi+\alpha; \quad \gamma+\alpha < \pi+\beta; \quad \alpha+\beta < \pi+\gamma.$$

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a megfelelő α, β, γ szögekből szerkeszthető Δ.

Megfordítva: a szögekre vonatkozó összefüggésekből következik:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta \cos\gamma} \quad \text{stb.}$$

Szorozzuk össze, mindkét oldalt, természetesen, hogy az a tört is eltűnjön:

$$\sin\alpha + \sin\beta\sin\gamma = \cos\beta\cos\gamma + \cos(\beta+\gamma) = 2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta-\gamma}{2}.$$

A feltétel szerint: $-\pi < \alpha+\beta-\gamma \leq \pi$ azaz $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$$

Szorozzuk össze:

tehát a cosinusok positivok, vagyis $\alpha+\beta$ positiv.

$$A-F = -\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma) = -2\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

De $\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}$ positiv, mert $-\frac{\pi}{2} < \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$

Az egyik feltétel szerint $3\pi > \alpha+\beta+\gamma > \pi$ vagyis

$\frac{3\pi}{2} > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} > \frac{\pi}{2}$, tehát a szög a második vagy harmadik quadransban van, s így cosinusa negatív jellel bír. Az egész $A-F$ tehát most is positiv, vagyis $\cos\alpha$ a valódi tört és így egyértelműleg megoldható.

A formula azonban log. számításra itt nem alkalmas, azért az oldal felének függvényét fejezzük ki. Az ismeretes eljárást alkalmazva

$$1+\cos\alpha = \frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\cos\alpha+\cos(\beta-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} =$$

$$= \frac{2\cos(\sigma-\gamma)\cos(\sigma-\beta)}{\sin\beta\sin\gamma} \quad \text{de} \quad 1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{tehát}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}} \quad (\text{A } \sqrt{\text{jel + jellel veendő.}})$$

$$1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\beta\sin\gamma-\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$$

$$= -\frac{\cos\alpha+\cos(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma} = -\frac{2\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma} \quad \text{tehát}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

A $\sqrt{}$ jel alatt positiv mennyiség szerepel, mert mint az előbb láttuk $\cos\sigma$ negatív jelű".

Ezek szerint: $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$

Hasonlóképen $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\beta)}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\gamma)}}$ és $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}}$

III. Adva: a, b, γ, vagyis három oppos. adat és γ. Ebben a feladatban semmi feltétel sem korlátozza, mert a szög. tétel segítségével $\operatorname{ctg}\alpha$ s aztán β és c is egyértelműleg meghatározható. A szög. tétel azonban a log számításnál szintén nem alkalmazható, azért úgy járunk el, mint hasonló esetben a sík háromszögnél: együtt határozzuk meg $\alpha+\beta$ és $\alpha-\beta$ értékét. A Neper-féle analogiák szerint

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}$$

Ezekből kiszámítható $\frac{\alpha-\beta}{2}$ és $\frac{\alpha+\beta}{2}$ s így α és β is. A megoldás egyértékű, mert így $\frac{\alpha+\beta}{2}$ mint $\frac{\alpha-\beta}{2}$ kisebb π-nél.
Az ismeretlen oldalak szintén az egyik Kepler féle analogia segítségével oldjuk meg.

$$\frac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{miből} \quad tg\frac{c}{2} = \frac{tg\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

IV. Adva: α, β, c szintén három szomszédos alkotórészt. Az eljárás az előbbihez teljesen hasonló. A Kepler-féle analogiák szerint:

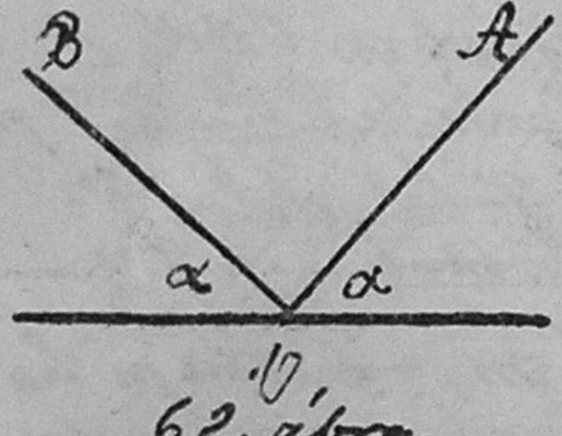
$$\frac{tg\frac{a-b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{tg\frac{a+b}{2}}{tg\frac{c}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Ezekből $\frac{a-b}{2}$ és $\frac{a+b}{2}$ s így a és b is meghatározhatók. A γ meghatározására szolgál.

$$\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{cotg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}} \quad \text{miből} \quad \text{cotg}\frac{\gamma}{2} = \frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}$$

V. Adva: a, b, α.

Mindenekelőtt kimutatjuk, hogy a megoldás tárgyalásánál elég lesz arra az esetre szorítkoznunk, midőn az adott $a < \frac{\pi}{2}$ és $b < \frac{\pi}{2}$.
Ui. is, ha $a < \frac{\pi}{2}$, $b > \frac{\pi}{2}$, akkor az első mellék gh.-nél $a < \frac{\pi}{2}$, $\pi - b < \frac{\pi}{2}$;
ha $a > \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$, akkor a második mellék gh.-re térve $\pi - a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$ és végül, ha $a > \frac{\pi}{2}$, $b > \frac{\pi}{2}$, akkor a harmadik mellék gh.-nél $\pi - a < \frac{\pi}{2}$, $\pi - b < \frac{\pi}{2}$.
Ha tehát $a < \frac{\pi}{2}$, $b < \frac{\pi}{2}$ esetre szorítkozunk, akkor $\frac{a+b}{2} < \frac{\pi}{2}$ s így $\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$ vagyis $\alpha + \beta < \pi$
A sinus tétel szerint akkor β meghatározása: $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}\sin\alpha$
Most még három esetet különböztetünk meg
1.) $a = b$, akkor $\alpha = \beta$
2.) $a > b$, akkor β számára csak 1 megoldás van. Ui. $\sin a > \sin b$ vagyis $\frac{\sin b}{\sin a} < 1$ s így $\sin\beta$ számára igaz tételt kapunk, tehát van megoldás, és pedig csak egy, mert $\alpha > \beta$ és $\alpha + \beta < \pi$ miből $\beta < \frac{\pi}{2}$
3.) $a < b$, akkor még ábrázolhat kell megkülönböztetnünk.
Ha $a < b$, akkor $\alpha < \beta$ és $\alpha + \beta < \pi$ tehát a megadott α nem lehet tompa, míg β tompaszög is lehet: $\alpha < \beta < \pi - a$



62. ábra.

vagyis β második szára az AOB szögtérbe esik.
a.) eset: $\sin b \sin\alpha > \sin a$, akkor megoldás
nincs, mert $\frac{\sin b}{\sin a} \sin\alpha$ nem igaz-i-zárt
b.) eset: $\sin b \sin\alpha = \sin a$ ekkor csak egy meg-
oldás van β számára, s ez $\beta = \frac{\pi}{2}$
c.) eset: $\sin b \sin\alpha < \sin a$ ekkor két meg-
oldás van, mert β hegyes és tompa is lehet.

A többi ismeretlen ezen V. feladatnál, a Neper féle analogiák-
ból adódik ki: $\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$ és $\frac{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$

Ezekből γ illetőleg c kiszámíthatók.

VI. Adva: α, β, a. Ez a feladat az előbbihez teljesen analog. Itt is elég lesz $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$ esetre szorítkoznunk, mert más esetekben a mellékgh. segítségével ezekre térhetünk vissza.

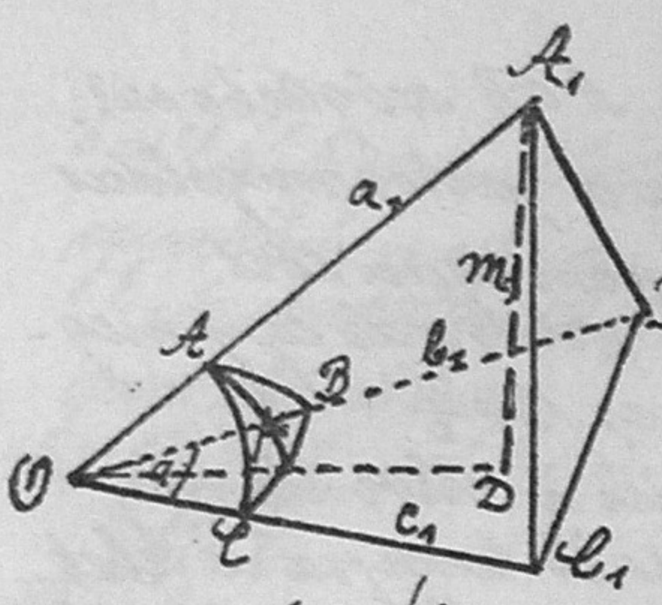
Ezen esetben $\frac{\alpha+\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$, tehát $\frac{a+b}{2} < \frac{\pi}{2}$ vagyis $a+b < \pi$.
A sinus tétel szerint: $\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin a$.

1.) $\alpha = \beta$, akkor $a = b$
2.) $\alpha > \beta$, akkor b számára csak egy megoldás van, mert $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < 1$
és $a > b$ tehát b hegyesszög kell legyen.
3.) $\alpha < \beta$ ekkor $a < b < \pi - a$! Itt két esetet kell megkülönböztetni;
a.) eset: $\sin\beta \sin a > \sin\alpha$: ekkor nincs megoldás, mert $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \sin a >$
b.) eset: $\sin\beta \sin a = \sin\alpha$, ekkor egy megoldás van, $b = \frac{\pi}{2}$
c.) eset: $\sin\beta \sin a < \sin\alpha$ ekkor két megoldás van, az egyik tompa,
a másik hegyesszög.

A többi ismeretlen ezeket az előbbi Neper-féle analogiákból adódnak

A ghszöghöz tartozó tetraéder köbtartalma.

Ha egy tetszőleges tetraéder egyik csúcsából egységnyi sugarú gömböt írunk, akkor a tetraéderhez egy gh. tartozik, melynek méretei a tetraéder méreteitől eltekintve a tetraéder és gh. közötti összefüggésből már ismeretesek. A feladat itt abban áll, hogy szándékunk szerint a tetraéder köbtartalmát, ha ismeretes a tetraéder három éle (a, b, c,) és a tetraéderhez tartozó ghszög



63. ábra.

Tekintsük a tetraéder alapjául az OB_1C_1 $\triangle$ oldalait s a tetraéder magasságát legyen A_1D_1; Ekkor a köbtartalmat V-vel jelölve

$$V = \frac{\triangle OB_1C_1 \cdot m_1}{3}$$

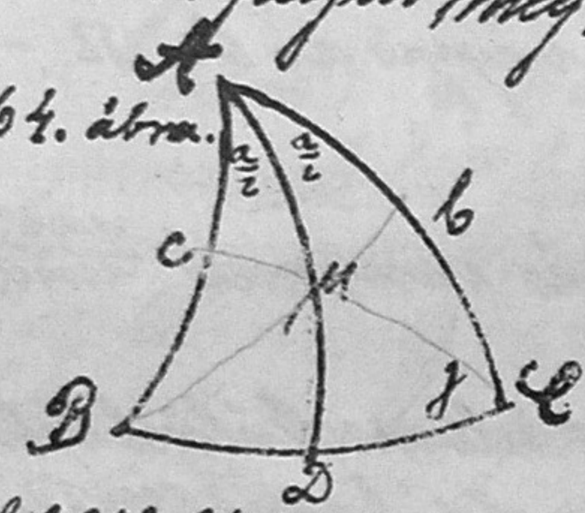
$\triangle OB_1C_1 = \frac{b_1 c_1 \sin\alpha}{2}$ és $m_1 = a_1 \sin\mu$ ha μ-vel jelöljük az AB él.spőgnek A csúcsból húzott magasságát. Ezeket:

$$6V = a_1 b_1 c_1 \sin\alpha \sin\mu$$

Ide írt szereplő $\sin\alpha \sin\mu = l$ szorzatot a gh.háromszög sinusainak szorzatának mondani. Nevét onnan nyerte, hogy tulajdonságaiban hasonlít a síkháromszög sinusához.

A gömbháromszög sinusa.

Vizsgáljuk meg, hogy milyen relatiók között a gh. szögeit a gh. alkotóívekhez.



64. ábra.

Az ABD és CDB gh.-ből a sinus tétel alkalmazásával nyerjük, hogy

$$\sin\alpha \sin\mu = l = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$
$$= \sin\beta \sin\gamma \sin\alpha$$
$$= \sin\gamma \sin\alpha \sin\beta$$

Ebből láthatjuk, hogy l-nek is legnagyobb értéke $+1$, ha t. illik $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, vagyis ha $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, tehát a rajtuk gömb sinusa egyenlő az egységgel. Ismeretes, hogy

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a \sin b}} \quad \text{és} \quad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

Továbbá $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, tehát

$$\sin\gamma = \frac{2}{\sin a \sin b}\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)} \quad \text{miből}$$

$$l = \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = 2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

Így fejezhető ki a gh. sinusa a gh. oldalaival.

Fejezzük most ki a gh. szögeivel. Hogy ezt végezhessük, áttérünk a polaris gh.háromszögre, ahol az oldalak $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$. Jelöljük a polaris gh. sinusát Σ-val, akkor az előbbiek szerint

$$\Sigma = \sin(\pi-\alpha)\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)$$
$$= \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$ Ugyanúgy kiadódik

még, hogy $\Sigma = \sin\beta \sin\gamma \sin\alpha$
$= \sin\gamma \sin\alpha \sin\beta$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$ és $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$, Tovaretes hogy

Továbbá $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin\alpha$, tehát

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sin\beta\sin\gamma}\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}$$ miből

$$\Sigma = \sin\beta\sin\gamma\sin\alpha = 2\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}$$

A poláris gh. szinusza tehát már kifejeztük az eredeti gh. szögeivel.

Lássuk most a két gh. szinusza közt az összefüggést.

$$S = \sin a \sin b \sin\gamma$$

$\Sigma = \sin\alpha\sin\gamma\sin\beta$ összeget el a kettőt egymással vegyük

tekintetbe a szinusz tételt, akkor

$$\frac{S}{\Sigma} = \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$ miből $\frac{S}{\Sigma} = \frac{\sin a\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$

de $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \Sigma$, tehát $S = \frac{\Sigma^2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$ E szerint S-et a

gh. szögeivel így fejezhetjük ki:

$$S = \frac{4\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$$

Ha pedig az $\frac{S}{\Sigma} = \frac{\sin a}{\sin\alpha}$ jobboldalán $\sin b$, $\sin c$-vel aprózunk

és osztunk is, lesz:

$$\frac{S}{\Sigma'} = \frac{\sin a\sin b\sin c}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin a\sin b\sin c}{S}$$

Miből Σ'-t a gh. oldalaival így fejezhetjük ki:

$$\Sigma' = \frac{4\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin a\sin b\sin c}$$

S jelentése még közvetlenebb lesz, ha oly tetraédert konstruálunk a gh.-et, melynek 3 éle egymásra egyenes szögű hasszúságú ($a_1 = b_1 = c_1 = 1$). Ekkor ui. is a tetraéder 6-szoros köbtartalma egyenlő a gh. szinuszával:

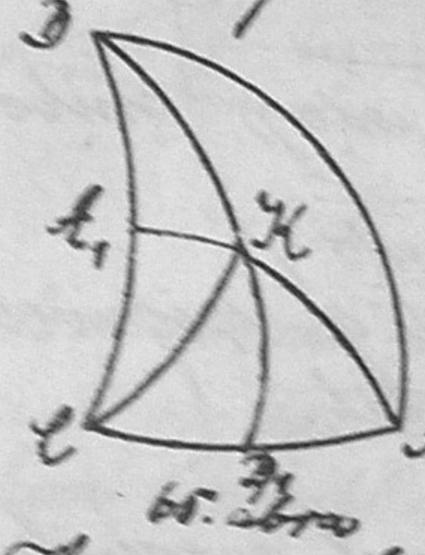
$6V = S$

A gömbháromszög területe.

Miután a gh. területét számítanánk, bebizonyítjuk a következő segédtételt: A gh. és az ellenes gh. területe egyenlő.

Ezt a tételt úgy bizonyítjuk be, hogy kimutatjuk, hogy minden gh.-et egyenlőszárú gh.-ekből lehet összeraknii. Ennek alapján a gömbháromszöget és az ellentétét is ilyen gh.-ekre bontjuk, melyek aztán a gömbháromszöggel egyenlő területbe lehet hozni.

A segédtétel bizonyítására a köv.: Felezzük az AB gh. A és B oldalát s a felezési t_1, B_1 pontokon át felezőkört. Ezen körök minden pontja egyenlő távolságra van az t_1, illetőleg B_1, B pontoktól, tehát a két kör metszése K egyenlő távolságra van mind a három csúcspontról A, B, C s így BKC, CKA és AKB gh.-háromszögek egyenszárúak.



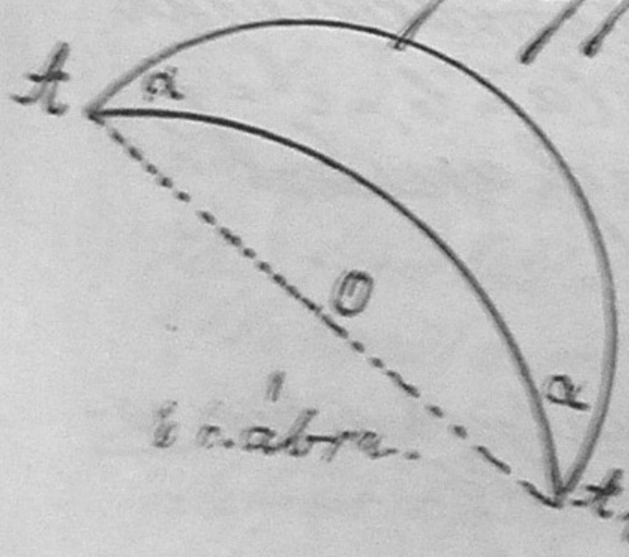
65. ábra

Ha most összehasonlítjuk az t_1, B_1, C, K pontok diametrális pontjait: t_1', B_1', C', K_1 pontokat, akkor ezek is egyenlőszárú gh.-eket határoznak meg, melyek tehát mint ismeretes, az előbbi egyenlőszárú gh.-ekkel a gömbön való eltolás által fedésbe hozhatók azzal világos nyilvánvalóvá lesz, hogy a gh. és ellentétének egyenlő területű.

A gh.-nek egyenlőszárú gh.-ekre való bontásánál 3 eset lehetséges: a K pont (amely egyúttal a gh. körül írható körének középpontja) vagy a háromszög belsejébe, vagy kerületére vagy esik a gh.-ön kívül esetleg. Az első esetben az eredeti gh. 3 egyenlőszárú gh.-ből, a második esetben kettőnek az összegéből, míg a harmadik esetben kettőnek az összegéből egynek a különbségéből nyerhető össze.

Szintúgy segédtétel gyanánt fel kell még használnunk a gömbi *kétszög* területét is.

Két legnagyobb gömbi kör gömbi kétszöget alkot. A gömbi kétszög két csúcsánál lévő szög egymással egyenlő. Továbbá a tétel szerint a gömbön a kétszögnek a területe annál nagyobb minél nagyobb a csúcsánál lévő szöge (α). Az egész gömb felszíne $4r^2\pi$ a félgömbé tehát $2r^2\pi$. Vegyük a gömböt egység sugarúnak



1
66. ábra

garuál, akkor az előbbiek szerint α π szögű gkétszög területe (t_α) úgy aránylik egy tetszőleges gkétszög területéhez (t_α) mint a „megfelelő" szögek nagyságai:

$$t_\pi : t_\alpha = \pi : \alpha \qquad \text{ebből}$$

$$t_\alpha = \frac{t_\pi \cdot \alpha}{\pi} \quad \text{de} \quad t_\pi \text{ épen a félgömb területe, tehát}$$

$$t_\alpha = \frac{2\pi\alpha}{\pi} = 2\alpha$$

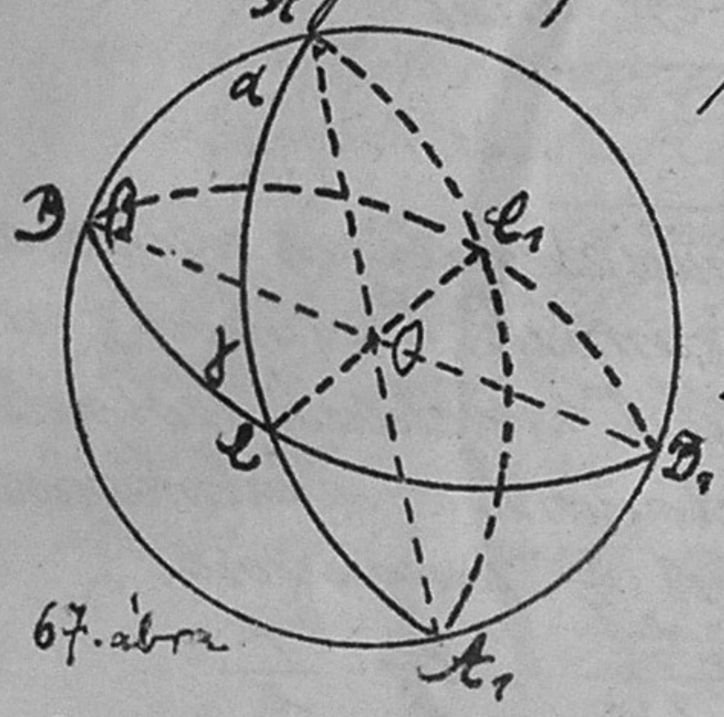
vagyis az egységsugarú gömbön a gkétszög felülete egyenlő a gkétszög szögének kétszeresével.

A két segédtétel felhasználásával egyszerűen meghatározhatjuk a felett ABC gh. területét.

Vegyük a kör. gkétszögek területét:

$$\left.\begin{aligned} ABC + BCA_1 &= 2\alpha \\ ABC + ACB_1 &= 2\beta \\ ABC + ABC_1 &= 2\gamma \end{aligned}\right\} + \text{per összege:}$$

$$3ABC + BCA_1 + ACB_1 + ABC_1 = 2(\alpha+\beta+\gamma)$$



67. ábra

Az első segédtétel szerint azonban ABC_1 gh. egyenlő" területű A_1BC gh.-gel, emiatt látjuk, hogy

$$2ABC + (ABC + BCA_1 + A_1B_1C + ACB_1) = 2(\alpha+\beta+\gamma) \qquad \text{de}$$

$(ABC + BCA_1 + A_1B_1C + ACB_1) = 2\pi$-vel a félgömb felszínével

vagy $ABC = \alpha+\beta+\gamma-\pi = \varepsilon$

Az $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \varepsilon$ kifejezést a gh. gömbi fölöslegének (gömbi excessus) nevezzük és állandóan ε-nal jelöljük. Mondhatjuk tehát, hogy az egységsugarú gömbön a gkétszög felülete egyenlő a gh. gömbi fölöslegével.

Cagnoli és L'Huilier formulái

A következőkben a gömbi fölösleg függvényét a gkétszög oldalainak függvényeivel fogjuk kifejezni.

$\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-\pi$ miből $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)$ Vegyük a szinust

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Tölhasználva a Gauss féle formulákat, melyek szerint:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \quad \text{és} \quad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \quad \text{nyerjük, hogy}$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Kifejtve $\cos\frac{a-b}{2}$ és $\cos\frac{a+b}{2}$ -t:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

Tekintetbe véve, hogy $2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma$ stb és $4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$-vel a számlálót s nevezőt szorozva kapjuk:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin a \sin b \sin\gamma}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = \frac{S}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

de $S = 2\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$ tehát

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Ez az u. n. Cagnoli féle formula. A logarithmus számításra nagyon alkalmas, de mindazáltal fogyatékosságai vannak. T. i. mivel $\frac{\varepsilon}{2}$-et a sinus által adja meg, ezért nem egyértékű megoldást szolgáltat, továbbá igen sok logarithmust kell számítanunk az alkalmazásánál.

Sokkal használhatóbb formulát kapunk $\frac{\varepsilon}{4}$ tangensére.

Ismeretes, hogy $\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{\cos\varphi + \cos\psi} = \frac{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}$

$\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi-\gamma}{2}$ Legyen itt $\varphi = \frac{\alpha+\beta}{2}$ és $\psi = \frac{\pi-\gamma}{2}$ akkor $\frac{\varphi-\psi}{2} = \frac{\varepsilon}{4}$,

tehát $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}}$

Itt is a Gauss féle formulák felhasználásával:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cos\frac{\gamma}{2} \text{ és } \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Ezeket beírva, nyerjük: $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{2\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}}{2\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-c}{2}}\operatorname{cotg}^2\frac{\gamma}{2}$

de $\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}$ i felsőjegyekre térve:

$$\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{4\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{4\sin\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-b}{2}}}$$

Ezt az értéket behelyettesítve: $\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\sin\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}}{\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s-c}{2}}\sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\sin\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-b}{2}}}$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$

Ez az u.n. L'Huilier féle formulax. Előnye a Cagnoli formula fölött az, hogy $\frac{\varepsilon}{4}$ -et egy értékkel kevesebb határozza meg, s az alkalmazásánál csak négy szögfüggvényt kell kiszámítani.

Mivelhogy $\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \frac{\pi}{2} = \sigma - \frac{\pi}{2}$

azért $\sin\frac{\varepsilon}{2} = +\sin\left(\sigma-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right) = -\cos\sigma$

tehát a Cagnoli formula szerint:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = -\cos\sigma = \frac{s}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Tehát σ cosinusát ki tudtuk fejezni tiszta a gh. oldalainak függvényeivel. Ezt az egyenletet csak mint mellék eredményt nyertük, de sokszor igen jó hasznát vehetjük.

Térjünk most át a polár gh. gömbi fölösleg címeb kiszámítására. A polár gh-nél a szögek: $\pi-a$, $\pi-b$, $\pi-c$, tehát a gömbi fölösleg: $\varepsilon = \pi-a+\pi-b+\pi-c-\pi = 2(\pi-s)$

Ezzerint $\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin s$, továbbá a polár gh. cosinusa: Σ és végre az oldalak $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, $\pi-\gamma$ helyén $\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$ helyébe $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ lép. Tehát míg az eredeti gh.-nél

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \frac{s}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$ volt, addig a polár gh.-nél

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = \sin s = \frac{\Sigma}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$ lesz.

Vizsgáljuk meg a mellék gh.-ek excessusának sinusait. Jelöljük a gömbi fölöslegeket itt $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ -mal, akkor

$\varepsilon_1 = \alpha+(\pi-\beta)+(\pi-\gamma)-\pi = \pi-2(\sigma-\alpha)$

$\varepsilon_2 = (\pi-\alpha)+\beta+(\pi-\gamma)-\pi = \pi-2(\sigma-\beta)$

$\varepsilon_3 = (\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+\gamma-\pi = \pi-2(\sigma-\gamma)$ tehát

$\sin\frac{\varepsilon_1}{2} = \cos(\sigma-\alpha)$; $\sin\frac{\varepsilon_2}{2} = \cos(\sigma-\beta)$; $\sin\frac{\varepsilon_3}{2} = \cos(\sigma-\gamma)$.

A mellékgh.-ek sinusa tehát, amik az eredeti gh.-é tehát:

$$\sin\frac{\varepsilon_1}{2} = \cos(\sigma-\alpha) = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\sin\frac{\varepsilon_2}{2} = \cos(\sigma-\beta) = \frac{s}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\sin\frac{\varepsilon_3}{2} = \cos(\sigma-\gamma) = \frac{s}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

A mellék gh.-ek polár gháromszögeinél:

$$l_1 = (\pi - a) + b + c - \pi = +2(s-a)$$
$$l_2 = a + (\pi - b) + c - \pi = +2(s-b)$$
$$l_3 = a + b + (\pi - c) - \pi = +2(s-c)$$ tehát

$$\sin\frac{l_1}{2} = \sin(s-a) = \frac{\Sigma_1}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

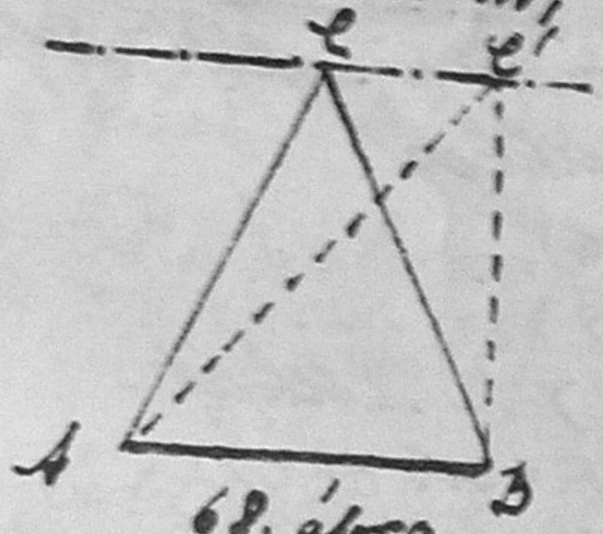
$$\sin\frac{l_2}{2} = \sin(s-b) = \frac{\Sigma_1}{4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\sin\frac{l_3}{2} = \sin(s-c) = \frac{\Sigma_1}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Összefoglalva: $\sigma_1, (s-a), (s-b), (s-c)$ mennyiségek sinusait kifejtő tételem a gh. oldalaival és szögeivel és szögeinek $\sigma_1, (\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)$ mennyiségek sinusait a gh. oldalaival.

A Lexell féle kör.

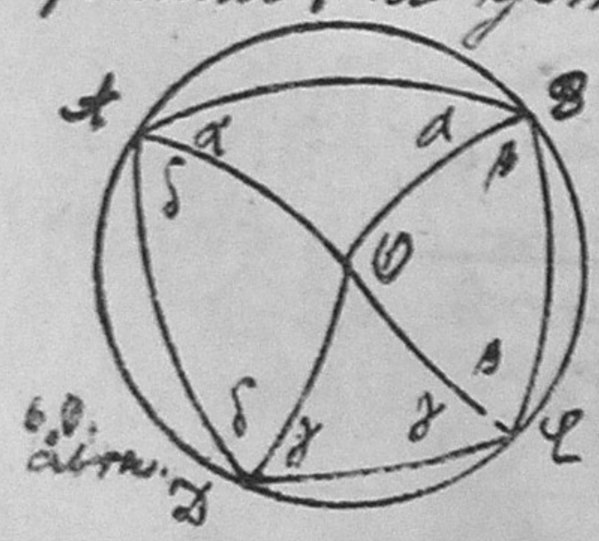
Foglalkozzunk most azzal a feladattal, hogyha egy gh. adott van s annak két csúcspontját fixnek tekintjük, harmadikpontját változtatnunk a harmadik csúcspontot, ha azt akarjuk, hogy a gh. területe ne változzék. A síkháromszögtanban ezt ehhez analog feladatnál evidens, hogyha a harmadik csúcsot (C) a csúcson átmenő s szemben fekvő (AB) oldallal párhuzamos egyenesen változtatjuk, akkor a háromszög területe állandó.



68. ábra.

Ill, mint látni fogjuk a harmadik csúcspont egy gömbi kis körön (melynek síkja nem megy keresztül a gömb középpontján) fog mozogni.

Ennek bebizonyítása előtt azonban egy segédtételt kell bevezetnünk: a gömbi kis körbe írt gömbháromszög olyan tulajdonságú, hogy belső pontból ezek felé a csúcsok felé egyenlő.



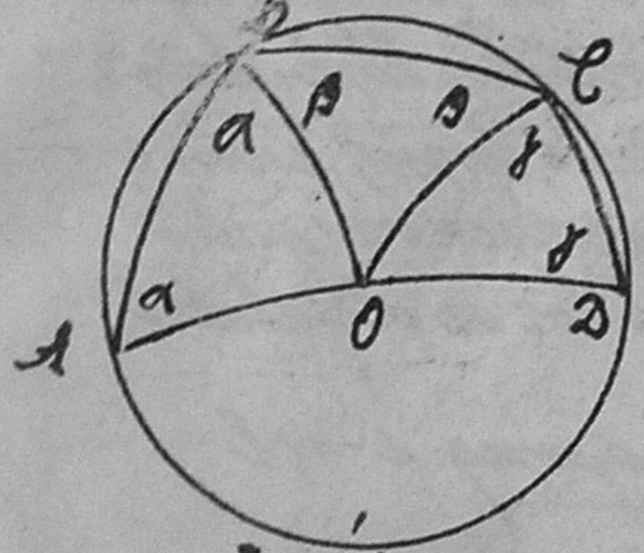
69. ábra.

A kiskör ui. és a négyszög köré írható kör, tehát a körépontja a négy csúcstól egyenlő távolságban. Ill. tehát az O

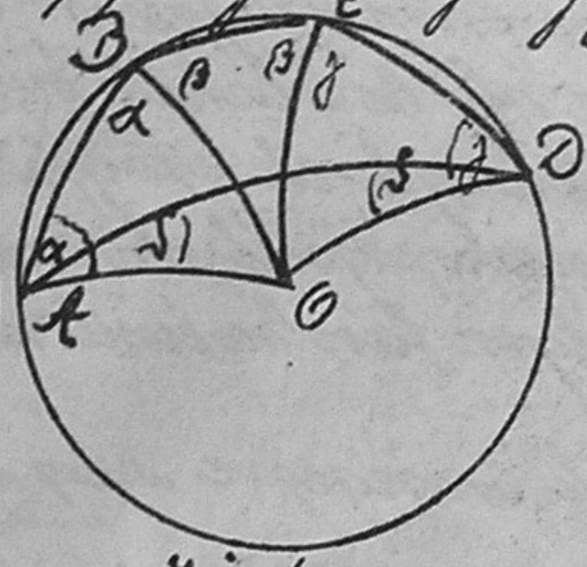
kőzéppontom és egy-egy oldalpontom át főköröket fektetünk, akkor egyenlőszárú gömb-ek keletkeznek, melyeknek az alapon fekvő 2-2 lapszögük egymással egyenlők. Tehát

1.) ha a kör középpontja a négyszögbe esik (69.ab.), akkor mint kipólusnövelő, az A és D csúcsnál levő szögek összege egyenlő a B és D csúcsnál levő szögek összegével.

2.) ha a kör középpontja az négyszög kerületére (aab.), vagy végső 3.) ha a négyszögön kívül esik (71.ab.), a tétel akkor is kipólusnövelő.



70. ábra.

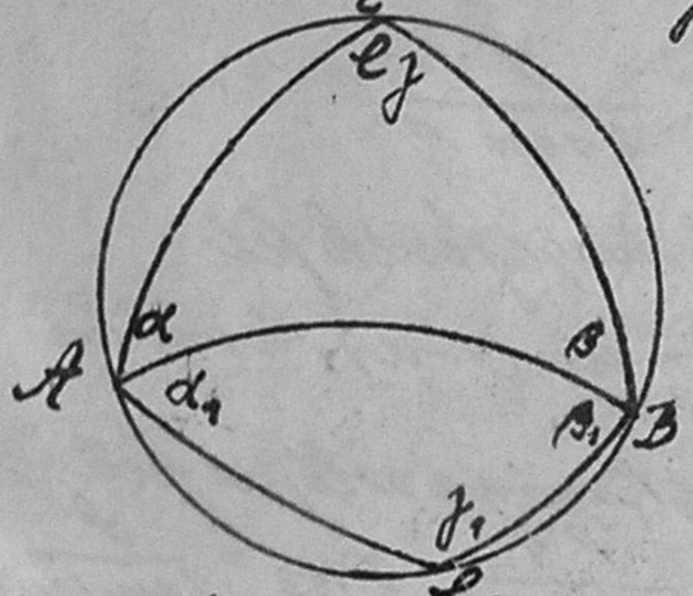


71. ábra

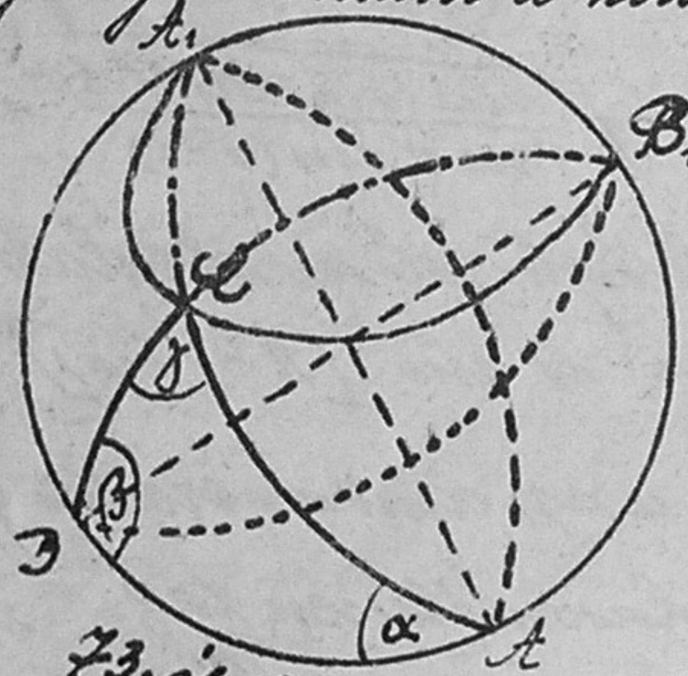
Ha már most körülvesszük egy gh-et a csúcsain átmenő kiskörrel s az AB oldallal szemben a körön még egy C_1 pontot és C-t az AB körrel összekötjük, akkor az előbbi tétel szerint $\alpha+\beta+\alpha_1+\beta_1 = \gamma+\gamma_1$, (72. ábra) miből $\alpha+\beta-\gamma = \gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1$ = állandó. Ha pedig a C pontot változtatjuk, akkor az $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = \gamma - \alpha - \beta$ = állandó.

Ezek után már megtudjuk oldani a kitűzött feladatot. U. is az $A_1 B_1 C$ gh. megfelelő szögei: $\pi-\alpha$, $\pi-\beta$, γ. Ha a C csúcsot az $A_1 B_1 C$ gh. kiskörön változtatjuk, akkor az előbbiek szerint:

$\pi-\alpha+\pi-\beta-\gamma = \pi-(\alpha+\beta+\gamma-\pi) =$ állandó, de ekkor szférikus képen



72. ábra

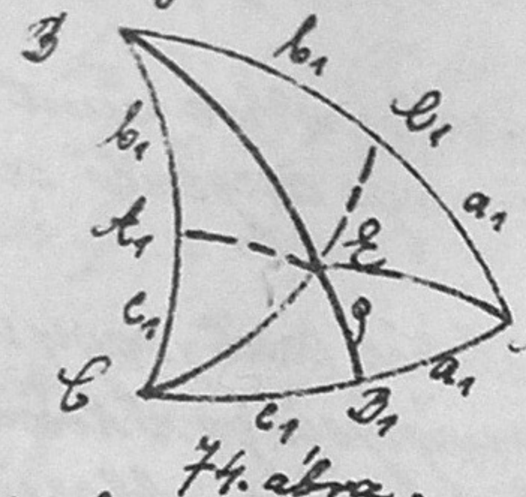


73. ábra.

$\alpha+\beta+\gamma-\pi = \varepsilon$ is állandó, vagyis ha a gh. egyik csúcsát az egyik oldalon a másik két csúcs határolásán átmenő kiskörön változtatjuk, akkor a gh. területe (ε) állandóan u.ag. Az $A_1 B_1$ pontokon átmenő kiskört Lexell féle körnek nevezik. Az itt közölt egyszerű bizonyítás pedig Steinertől ered.

A gháromszög nevezetes körei.

A gháromszög oldalait érintő kör. Legyen a vizsgálandó gh. ABC-



74. ábra.

és feleznük az A-nál levő szöget, akkor a felező körnek minden pontja egyenlő normális távolra lesz az AB szög oldalaitól. U.ez áll a B szög felezőjéről is. A két szögfelező egymást az E pontban metszi, melyből a BC-hez húzott r kör éppen szögfelező C-re. Ha így nyert E pont a gh.-be beírható érintő kör középpontja.

A gh. külső szög felezői a mellék gh.-ek szögfelezői lesznek, éppen ezért ezeket külön, mint a síkháromszögnél, nem szükséges vizsgálni.

Képzeljük, hogy a csúcsoktól milyen távolra érinti a kör az oldalakat. Minthogy

$$\left.\begin{aligned} a_1 + b_1 &= c \\ b_1 + c_1 &= a \\ c_1 + a_1 &= b \end{aligned}\right\}$$

egyenlőket összegezve s az összeg 2-vel osztva:

$$a_1 + b_1 + c_1 = s$$

azért $a_1 = (s-a)$; $b_1 = (s-b)$; $c_1 = (s-c)$

Számítsuk ki a kör sugarát

az EB_1C gh.-ből $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{\sin(s-c)}$ de $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}}$

azért $\operatorname{tg}\varrho = \sin(s-c)\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s \sin(s-c)}} = \frac{\varrho}{2\sin s}$

Minthogy az első mellékgh.-nél az oldalak összegének fele:

$\frac{a+\pi-b+\pi-c}{2} = \pi - (s-a)$ és $\sin[\pi-(s-a)] = \sin(s-a)$, továbbá a mellékgh. sinusa u.az, mint az eredeti gh.szöge volt, azért

$\operatorname{tg}\varrho_1 = \frac{-\varrho}{2\sin(s-a)}$ hasonlóképen $\operatorname{tg}\varrho_2 = \frac{\varrho}{2\sin(s-b)}$; $\operatorname{tg}\varrho_3 = \frac{\varrho}{2\sin(s-c)}$

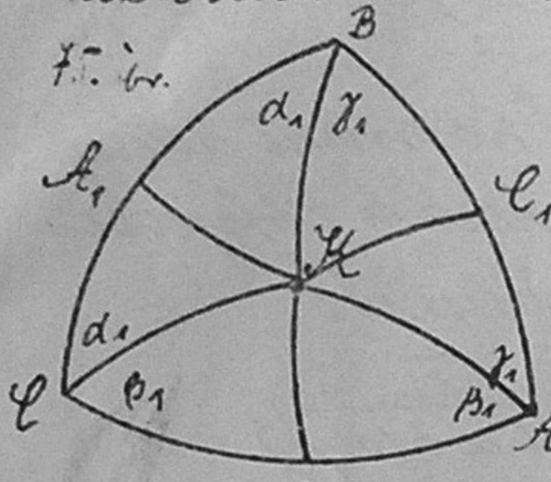
Ha tekintetbe vesszük, hogy $\varrho = \frac{\Sigma^2}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$ és hogy $\sin\alpha = \frac{\Sigma}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

akkor nyerjük, hogy $\operatorname{tg}\varrho = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\,\Sigma}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}$ vagy

$$\operatorname{tg}\varrho = \frac{\Sigma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Tűnődjünk tehát azon, hogyan lehet a beírható kör sugarát úgy a gúlaoldalaiból, mint a szögeiből.

A gúlaszög köré írható körről. Az A B C gúlaszögben felezzük az oldalakat s a felező vonalakon át (A_1, B_1, C_1) fektessünk a megfelelő oldalakra merőlegesen főköröket. Ezek egy K pontban metszik, mely pont egyenlő távolra van a gúlaszög határoló síkjaitól, tehát a gúlaszög köré írható körének középpontja. Ha a K ponton át a tengelyen át főkört fektetünk, akkor egyenlőszárú gúlaszögeket kapunk, tehát ap alapon fekvő szögek egyenlők.



7. ábra.

Mivelhogy: $\left.\begin{aligned}\alpha_1+\gamma_1&=\beta\\ \gamma_1+\beta_1&=\alpha\\ \beta_1+\alpha_1&=\gamma\end{aligned}\right\}$ ezek összegezve s az összeget 2-vel osztva

$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=\sigma$ és így

$\alpha_1=(\sigma-\alpha),\ \beta_1=(\sigma-\beta),\ \gamma_1=(\sigma-\gamma)$

Számítsuk ki a kör sugarát. Az KC_1A derékszögű gh.-ből:

$$\operatorname{ctg} r=\cos\gamma_1,\quad \operatorname{ctg} AC_1=\cos(\sigma-\gamma)\operatorname{ctg}\frac{c}{2}$$

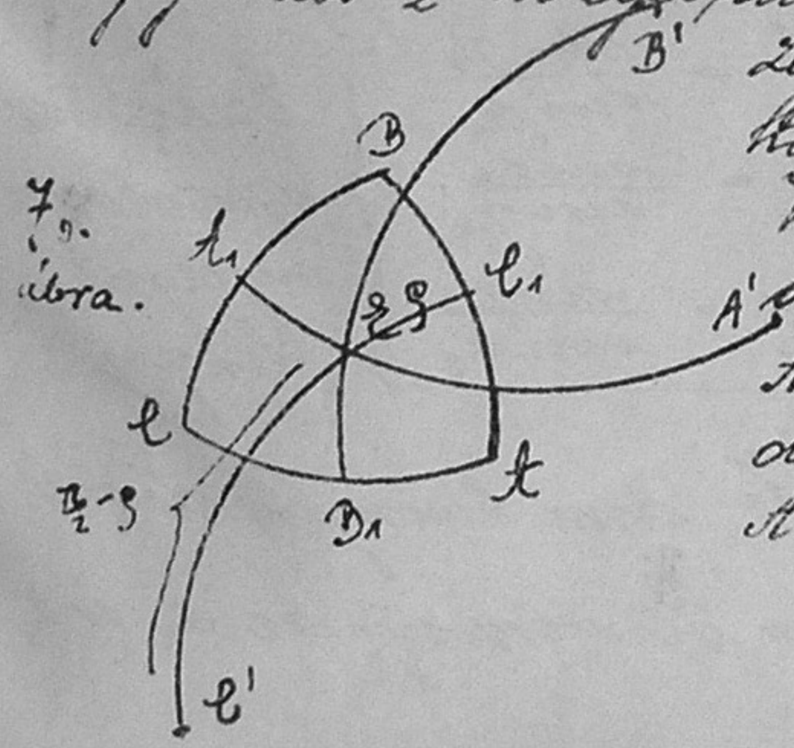
de $$\operatorname{ctg}\frac{c}{2}=\sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\gamma)}}$$ tehát

$$\operatorname{ctg} r=\sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma}}=\frac{\Sigma}{2\cos\sigma}$$

A gúlaháromszög körülírható körének sugarát (r) igen könnyen le lehet vezetni a beírható kör sugarából és fordítva. U. is a gúlaszög beírható körének sugara s de polárgúlaszög körülírható sugara egymást $\frac{\pi}{2}$-re egészítik ki és a két kör középpontja egybeesik.

Legyen u. is az A B C gh. beírható körének középpontja E.

Vezessünk ezen pontos keresztül a gúlaszög oldalaira merőleges főköröket, akkor $A_1E=B_1E=C_1E=\varrho$. Egészítsük ki mindenik körívet $\frac{\pi}{2}$-re, akkor az így nyert A' B' C' gúlaszög az eredetinek polár gh.-e



8. ábra.

az $\mathcal{E}t' = \mathcal{E}B' = \mathcal{E}C' = \frac{\pi}{2} - \xi$ ívek pedig a polár gúlapóg körülírható körének sugarai. Ha tehát az eredeti gk. beírható és körülírható körének sugara ϱ és r, továbbá a polár gúlapóg két körének sugara ϱ' és r', akkor $\varrho + r' = \frac{\pi}{2}$ és $r + \varrho' = \frac{\pi}{2}$.

Az eredeti gúlapóg körülírható körének sugarához könnyű áttérni a mellék gúlapógok körülírható körének sugarához, mert itt kifejezésben csak σ helyett $(\sigma - \alpha)$, $(\sigma - \beta)$ és $(\sigma - \gamma)$-t kell írnunk.

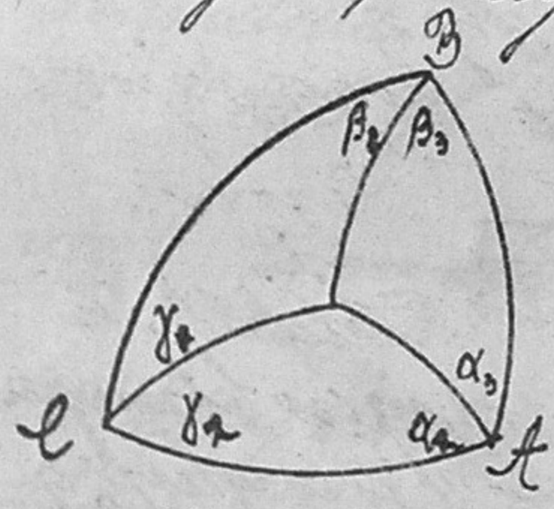
$$\operatorname{cotg} r_1 = \frac{\Sigma}{2\cos(\sigma-\alpha)} \quad \text{i} \quad \operatorname{cotg} r_2 = \frac{\Sigma}{2\cos(\sigma-\beta)}$$

$$\operatorname{cotg} r_3 = \frac{\Sigma}{2\cos(\sigma-\gamma)}$$

Az utóbbi kör sugara r_3 egyúttal a C csúcshoz tartozó $2c$ oldalélre írható körének sugara is.

A gúlapógeknél is áll a tétel, hogy a három közéjutóval és a három magasságoval egy-egy pontban metszik egymást. Ezt tétel bebizonyítása előtt azonban egy segédtételből van szükségünk, melyet előrebocsátunk: ha a gúlapóg egy P pontján és az 3 csúcson át gömbfelület fektetünk, akkor a csúcsoknál „lefelé" gúlapógelemre nézve a következő relatio áll fenn:

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$$



77. ábra.

FORDÍTVA: ha a gúlapógek közt ez a relatio fennáll, akkor a csúcsoktól kiinduló gömbök egy pontban metszik egymást.

Bizonyítása:

BPC gúlapógből: $\frac{\sin b_1}{\sin c_1} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\beta_1}$

CPA „ : $\frac{\sin c_1}{\sin a_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\gamma_2}$

APB „ $\frac{\sin a_1}{\sin b_1} = \frac{\sin\beta_3}{\sin\alpha_3}$

Ezeket összeszorozva nyerjük, hogy:

$$1 = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\beta_3}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_2}$$

A fordított tétel bebizonyításából: ami bizonyítandó volt.

Előbb kimutatjuk, hogy a $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = K$ viszony az α_2 és α_3

szögeket egyenlőlegy határozzák meg, ha $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha$ a ghpög egyik szöge.

Ismeretes u.is, hogy

$$\frac{\sin\alpha_2 - \sin\alpha_3}{\sin\alpha_2 + \sin\alpha_3} = \frac{k-1}{k+1} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

A ghpög minden szöge kisebb π-nél, tehát $\alpha < \pi$ és így $\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2} < \frac{\pi}{2}$ és így $\frac{\alpha_2-\alpha_3}{2}$ tangense egyenlőlegy határozza meg a szöget.

Mai most, ha a fönnálló

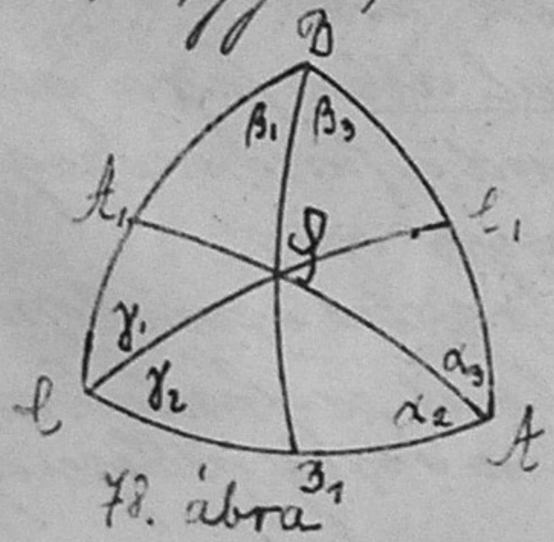
$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1 \quad \dots\dots (m)$$

relationak megfelelőlegy választjuk az α_2, α_3 és β_3, β_2 szögeket, akkor az A és B csúcsokból kiinduló körök metszik egymást egy S pontban, ha ezt a pontot összekötjük a harmadik csúccsal, s az itt föllépő szögeket γ_1' és γ_2'-vel jelöljük, akkor az előbbi tétel szerint $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\gamma_1'}{\sin\gamma_2'} = 1$.

Mindezekről azonban a szögeket úgy kellett volna föl, hogy álljon az (m) relatio, tehát kell, hogy $\frac{\sin\gamma_1'}{\sin\gamma_2'} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$ legyen.

De amint kimutattuk ez az viszony a két szöget egyenlőlegy határozza meg, tehát $\gamma_1 = \gamma_1'$ és $\gamma_2 = \gamma_2'$, Amivel aztán a tételünk is beigazolást nyert.

Most már bebizonyítjuk, hogy a ghpögnél a három középvonal egy pontban metszi egymást. Jelöljük a csúcsoknál fekvő szögeket a már ismert módon, a középvonalakat pedig a_1, b_1, c_1-gyel, akkor a sinustétel alkalmazásával:



78. ábra

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_2}$$

$$\frac{\sin b_1}{\sin\frac{b}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_3} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta_1}$$

$$\frac{\sin c_1}{\sin\frac{c}{2}} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma_1}$$

Ezekből

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

} Ezeket összeszorozva, nyerjük, hogy

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3} \cdot \frac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1$$

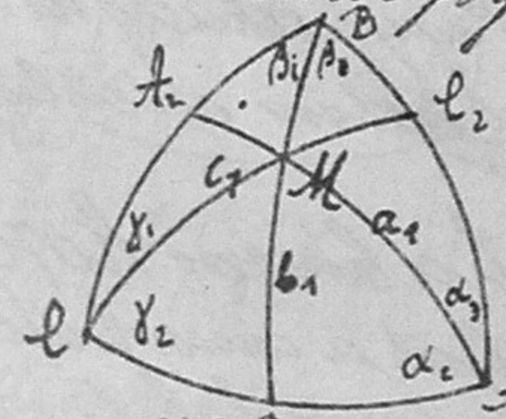
és így a megfeltétel szerint a három körív tényleg egy pontban metszi egymást.

A magassági körök metszésénél két eset lehetne megkülönböztetnünk aszerint, amint a magassági vonalak metszése a gúlán belül, vagy kívül történik. Az utóbbi esetet azonban megfelelő mellék gl. bevezetésével az előbbire fogjuk visszavezetni.

Ha a gúlának egy derékszögű éldarabja van, akkor a tétel, mely szerint a három magassági vonal egy pontban metszi egymást evidens, amennyiben a derékszögnél lévő 6 adik az illető magassági körívek metszése.

Ha a gúlában két, vagy három derékszögű van, akkor a magassági határvonalak, tehát a tételnek nincsen értelme.

Tehát csak az általános gúlánál kell a tételt bebizonyítanunk. Vizsgáljuk először azt még, hogy egy csúcsból kiinduló magasság-vonal onnan fog a gúlán belülről keresztül menni? Minthogy egy magassági meghúzásával két derékszögű gúlát kapunk és a derékszögű gúlánál a befogók egyenlő jellegűek a szemben lévő szögekkel, azért most is, hogy a gúlán 2 szöge egyenlő jellegű, akkor a 3-ik csúcsból kiinduló magassági körív a gúlán belülről halad keresztül, míg, ha a két szög nem egyenlő jellegű, akkor azon kívül.



79. ábra.

Eszerint mind a három magassági vonal akkor fog a gúlán belülről keresztül menni, ha a gúlának mind a három szöge egyenlő jellegű, vagyis mind a három hegyes szög.

A tétel beigazolásainál elég lesz ezzel az esettel szemben foglalkoznunk, mert ha a szögek közt $\frac{1}{2}$-nél nagyobbrat is fordulhatnak elő, akkor a megfelelő mellékgúlánál a 3 szög jellege egyenlő.

. Az eredeti és a mellék ghopögelnek pedig közös magassági ívei vannak.

Jelöljük a magasságvonalak meghúzása által keletkezett négyeket az ismert módon, továbbá a magasságvonalakat megfelelően a_1, b_1, c_1 -gyel (79. ábr), akkor $AB A_2$ derékszögű gh-ből

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha_2} = \sin \alpha_3$$

$A\,C\,A_2$ derékszögű ghból $\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha_2} = \sin \alpha_2$

E két egyenlet osztva

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} = \frac{\cos \gamma}{\cos \beta}$$

Hasonlóképp nyerjük: $\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$

és $\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$

} e három egyenlet összeszorozva

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$

. Tehát a segédtétel szerint a három magasságvonal is egy pontban metszi egymást.

A síkháromszöggel való analogiából következnek hogy a ghszögnél is az M. S és K pontok egy gömbi főkörön feküsznek. Ez a tétel azonban nem áll. Ennek magyarázatául szolgáljon az, hogy a gömbön nincsenek hasonló idomok, amennyiben két ghszög-nek a 3 szöge egyenlő, akkor már a 3 oldala is egyenlő.

Hasonlóképen hiányzik a ghszögnél a Feuerbach féle körnek megfelelő kör is de van egy olyan kör, amely a ghszög és a háromo mellékghszög közt körül egyszerre érinti. Ez a kör az úgynevezett Hart féle kör.

Értelemzavaró tollhibák.

21	oldal	12	és	13.	sorban „ $\frac{a}{6}$ " helyett „ $\frac{b}{6}$ " olvasandó
29	„	26			„ „ jobb oldal" helyett „ bal oldal" olvasandó
37	„	6			„ „ $\frac{a}{6}$ helyett $\frac{a+6}{6}$ olvasandó
43	„	9			„ „ felső" „ „ felső" olvasandó
46	„	17			„ „ 25° „ „ $\frac{7}{2}$ „
54	„	7			„ „ szöge" „ „ oldala "
62	„	alulról 9			„ „ csúcsainak „ „ oldalainak "

Tartalom jegyzék.

	Oldal
Bevezetés	3
A sík trigonometriája. Egyenes mérése	5
A szögek mérése	6
Vectorok összeadása	8
Szögek összeadása	9
Szög elnevezései	10
Vektorok és szögek összefüggése	11
Trigonometriai alapegyenletek	16
Trigonometriai főbb egyenletek	17
Három és többszörös szögek függvényei	25
Szögfüggvények kiszámítása	27
A szögfüggvények számításánál elkövetett hibák nagysága	33
Gyakorlati alkalmazások.	35
Általános háromszög megoldása	36
A háromszög területe	38.
Potheuot feladata	38

Oldal

A háromszögre vonatkozó tételek _ _ _ _ _ _ _ 39
A körül írható körről _ _ _ _ _ _ _ _ _ 42
A háromszög magassági pontja, súlypontja _ _ 43
A Feuerbach féle kör _ _ _ _ _ _ _ _ _ 44
A háromszög nevezetesebb pontjainak távolsága _ _ 46
A gömb trigonometriája _ _ _ _ _ _ _ _ 50
Szögek mérése az egységsugarú gömbön _ _ _ 51
A gömbháromszög _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 51
A gömbháromszög tételei _ _ _ _ _ _ _ _ 53
Gömbháromszögtani alapegyenletek _ _ _ _ 56
Gauss féle formulák _ _ _ _ _ _ _ _ 59
Neper féle analogiák _ _ _ _ _ _ _ _ 60
Gömbháromszögek megoldása _ _ _ _ _ _ 61
A derékszögű gömbök feladatai _ _ _ _ _ 63
A derékszögű gömbháromszög megoldása _ _ _ 66
Általános gömbháromszögek megoldása _ _ _ _ 67
A gömbháromszög sinusa _ _ _ _ _ _ _ _ 72
A gömbháromszög területe _ _ _ _ _ _ _ _ 73
Cagnoli és L'Huilier formulái _ _ _ _ _ _ 75
A Lexell féle kör _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ 78
A gömbháromszög nevezetesebb pontjai _ _ _ _ _ 80

M. Kr. Turun Yliop.
Tähtitieteellinen
Matematiikan
laitoksen Kirjasto
Suoki. no: 3 (6)
Cluster: